3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 SS 2020 18. Dezember 2020

Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe
			A

Aufgabe 1 (10 Punkte) Thomas wird im Sommer in das Ferienlager am Wolfgangsee fahren. Um den Organisatoren die Planung zu erleichtern, soll er davor bekannt geben, welche Sportarten (maximal drei!) er dort ausüben möchte. Thomas kann sich nur schwer entscheiden und schreibt folgende Email.

> *Liebe Organisatoren,*
> *ich freue mich schon sehr auf den Sommer und das Camp!*
> *Fußball und Handball sind beide ok, ich möchte aber auf keinen Fall beide machen, das wäre mir zu anstrengend. Mein Freund Florian kommt auch ins Camp und geht Bogenschießen, das möchte ich auf jeden Fall auch machen!*
> *Falls ich beim Rudern teilnehme, möchte ich auch segeln, damit sich der Weg zum See auszahlt; Segeln ohne Rudern kann ich mir aber schon vorstellen, das ist alleine auch spannend genug. Ich möchte gerne meine Oberarme trainieren, dafür sind wohl Rudern oder Handball ganz gut geeignet; auch beide gleichzeitig wären in Ordnung.*
> *Bis bald, Thomas*

a) Übersetzen Sie die beschriebenen Wünsche mit allen Anhaltspunkten in aussagenlogische Formeln. Geben Sie die Bedeutung aller verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Welche Kombinationen von Sportarten erfüllen die Wünsche von Thomas? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien *Feiert*/2, *Fest*/1, *Kind*/1 und *Lustig*/1 Prädikatensymbole sowie *weihnachten* und *hannukah* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$Fest(x)$	... x ist ein Fest	$Feiert(x, y)$	... x feiert y
$Kind(x)$	... x ist ein Kind	*weihnachten*	... Weihnachten
$Lustig(x)$	... x ist lustig	*hannukah*	... Hannukah

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Kein Kind feiert sowohl Weihnachten als auch Hannukah.

b) Es gibt lustige Feste, die von allen Kindern gefeiert werden.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Mia}, \text{Max}, \text{Anna}, \text{Tim}, \text{Fasching}, \text{Ostern},\\
&\quad\ \text{Laternenfest}, \text{Weihnachten}, \text{Hannukah}, \text{Advent}\}\\
I(\mathit{Fest}) &= \{\text{Fasching}, \text{Ostern}, \text{Laternenfest}, \text{Weihnachten}\}\\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Mia}, \text{Max}, \text{Anna}\}\\
I(\mathit{Lustig}) &= \{\text{Fasching}, \text{Laternenfest}, \text{Advent}\}\\
I(\mathit{Feiert}) &= \{(\text{Mia}, \text{Fasching}), (\text{Mia}, \text{Ostern}), (\text{Mia}, \text{Weihnachten}),\\
&\quad\ (\text{Max}, \text{Laternenfest}), (\text{Max}, \text{Weihnachten}), (\text{Max}, \text{Ostern}),\\
&\quad\ (\text{Tim}, \text{Anna}), (\text{Tim}, \text{Hannukah}),\\
&\quad\ (\text{Anna}, \text{Fasching}), (\text{Anna}, \text{Weihnachten})\}\\
I(\mathit{weihnachten}) &= \text{Weihnachten}\\
I(\mathit{hannukah}) &= \text{Hannukah}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der angegebenen Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\forall x\,(\mathit{Kind}(x) \supset \exists y(\mathit{Fest}(y) \wedge \mathit{Feiert}(x, y)))$

d) $\exists x\,(\mathit{Kind}(x) \wedge \exists y\,(\mathit{Fest}(y) \wedge \mathit{Lustig}(y) \wedge \mathit{Feiert}(x, y)))$

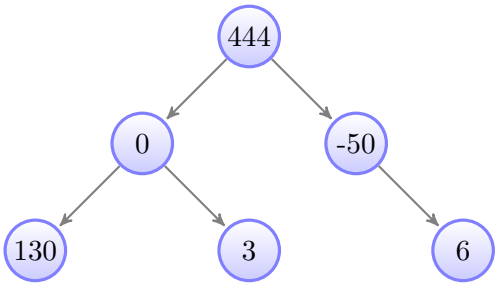
e) $\forall x\,(\mathit{Feiert}(x, \mathit{weihnachten}) \not\equiv \mathit{Feiert}(x, \mathit{hannukah}))$

f) $\forall x\,(\mathit{Fest}(x) \supset \exists y\,(\mathit{Kind}(y) \wedge \mathit{Lustig}(y) \wedge \mathit{Feiert}(x, y)))$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Binäre Bäume zur Speicherung ganzer Zahlen können als lineare Zeichenketten kodiert werden, indem jeder Knoten des Baums als

$$\texttt{<}\ \mathit{linkerBaum}\ \mathit{Zahl}\ \mathit{rechterBaum}\ \texttt{>}$$

dargestellt wird. Die spitzen Klammern sind Teil der Kodierung, *Zahl* steht für ein dezimales Numeral mit optionalem Vorzeichen. Für diese Aufgabe legen wir fest, dass Numerale keine führenden Nullen aufweisen dürfen. Negative Zahlen beginnen mit einem Minuszeichen, nichtnegative Zahlen tragen kein Vorzeichen. *linkerBaum* bzw. *rechterBaum* kodieren den linken bzw. rechten Teilbaum. Der leere binäre Baum wird durch `<>` dargestellt. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Zeichenketten, die auf diese Weise binäre Bäume kodieren.
Beispiel: Die Zeichenkette `<<<<>130<>>0<<>3<>>>444<<>-50<<>6<>>>>` kodiert den binären Baum

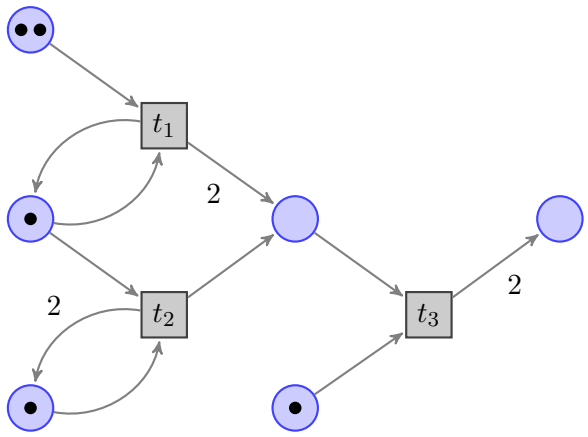


Die Blätter des Baumes werden durch die Zeichenketten `<<>130<>>`, `<<>3<>>` und `<<>6<>>` dargestellt; bei Blättern sind sowohl der linke als auch der rechte Unterbaum leer.

a) Beschreiben Sie die Sprache $\mathcal{B}$ mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

b) Handelt es sich bei $\mathcal{B}$ um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Falls ja, skizzieren Sie den Ausdruck in einer der in der Vorlesung behandelten Notationen. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung.



a) Geben Sie für jede Transition an, wie oft sie feuern kann und wovon dies abhängt.

b) Lassen Sie die Transitionen in einer von Ihnen gewählten Reihenfolge so lange feuern, bis es zu einem Deadlock kommt, das heißt, bis keine Transition mehr feuern kann. Geben Sie nach jedem Feuern einer Transition als Zwischenschritt die Markierung des Netzes an.

Hinweis: Je schneller die von Ihnen gewählte Reihenfolge zu einem Deadlock führt, desto weniger Zwischenschritte müssen Sie angeben.

c) Geben Sie alle Transitionsfolgen an, deren Feuern von der oben angegebenen Anfangsmarkierung zu einem Deadlock führen. Geben Sie nur die Bezeichnung der Transitionen an, die feuern, nicht die Markierung des Petri-Netzes danach.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Auf Wikipedia ist folgende Definition zu finden:

> Eine *links-lineare Grammatik* wird durch ein 4-Tupel $G = (N, \Sigma, P, S)$ beschrieben, wobei
>
> - N und Σ endliche, disjunkte Mengen von Symbolen sind ($N \cap \Sigma = \{\}$),
> - S ein Symbol aus N ist ($S \in N$) und
> - $P \subseteq N \times (N \cdot \Sigma^* \cup \Sigma^*)$ eine endliche Menge von Paaren ist.
>
> Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt $(x, y) \in P$ wird auch $x \to y$ geschrieben. Die Notation $x \to y_1 \mid \cdots \mid y_n$ ist eine Abkürzung für die Produktionen $x \to y_1, \ldots, x \to y_n$.
>
> Seien $u, v \in (N \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter. Das Wort $u\,y\,v$ ist aus dem Wort $u\,x\,v$ in einem Schritt ableitbar, geschrieben $u\,x\,v \Rightarrow u\,y\,v$, wenn $x \to y$ eine Produktion in P ist. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist die Menge $\{\, w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \,\}$, wobei $\overset{*}{\Rightarrow}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Rightarrow$ bezeichnet.[1]

[1] Das heißt, dass $\overset{*}{\Rightarrow}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln eine links-lineare Grammatik gemäß der obigen Definition darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort, falls es sich um keine links-lineare Grammatik handelt. Entspricht das Tupel der Definition, geben Sie die Sprache an, die durch die Grammatik generiert wird.

a) $(\{\texttt{X}\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \{\texttt{X} \to \texttt{Xab}\}, \texttt{X})$

b) $(\{\texttt{X}\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \{\texttt{X} \to \texttt{aXb} \mid \varepsilon\}, \texttt{X})$

c) $(\{\texttt{a}\}, \{\texttt{X}, \texttt{b}\}, \{\texttt{a} \to \texttt{abX} \mid \texttt{X}\}, \texttt{a})$

d) $(\{\texttt{X}\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \{\texttt{X} \to \texttt{abX} \mid \texttt{X}\}, \texttt{X})$

e) $(\{\texttt{X}, \texttt{Y}\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \{\texttt{X} \to \texttt{Xa} \mid \texttt{Yb} \mid \varepsilon, \texttt{Y} \to \texttt{Yb} \mid \varepsilon\}, \texttt{X})$

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.
- Es gilt $u \overset{*}{\Rightarrow} u$ für alle Wörter $u \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Aus $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ und $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\overset{*}{\Rightarrow}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.