

3.0/2.0 VU Formale Modellierung 185.A06 SS 2020 23. September 2020			
Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe A

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es war einmal . . . als Vorlesungen noch im Hörsaal stattfanden. Eine Gruppe Studierender betritt pünktlich zu Vorlesungsbeginn das AudiMax und findet anstelle des Professors eine Bombe mit fünf Kippschaltern sowie folgende Nachricht vor.

Liebe Studierende,

um euch zur Aussagenlogik zu motivieren, habe ich diese Bombe gebaut. Sie hat fünf Kippschalter (A, B, C, D und E), die jeweils in der Position „oben“ bzw. „unten“ stehen können. Die fünf Kippschalter müssen binnen einer Stunde alle in der richtigen Position stehen, sonst explodiert die Bombe und ihr werdet alle mit dem wohlriechenden Schleim überzogen, den ich in die Bombe gefüllt habe. Hier sind eure Hinweise.

- Mindestens drei Schalter müssen oben sein, sonst knallt's.
- B darf nicht in der gleichen Position sein wie C, sonst knallt's.
- Wenn D oben ist, müssen C und E unten sein, sonst knallt's.
- A muss oben sein, sonst . . . eh schon wissen.
- Die Schalter C und D dürfen nicht gleichzeitig unten sein, sonst schleimt's.

Viel Erfolg, Crazy Prof

- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.
- b) Wie müssen die Kippschalter stehen? Ist es möglich, die Bombe zu entschärfen? Welche Lösungen gibt es? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien *Frisst*/2, *Vogel*/1, *Futter*/1 und *Groß*/1 Prädikaten-symbole sowie *samen* und *beeren* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$Vogel(x)$. . . x ist ein Vogel	$Frisst(x, y)$. . . x frisst y
$Futter(x)$. . . x ist Futter	<i>samen</i> . . . Samen
$Groß(x)$. . . x ist groß	<i>beeren</i> . . . Beeren

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Es gibt Vögel, die fressen Samen, aber keine Beeren.
- b) Kein Futter wird von allen großen Vögeln gefressen.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$\mathcal{U} = \{\text{Kakadu, Kiwi, Ara, Specht, Spatz, Nüsse, Körner, Samen, Würmer, Beeren, Früchte}\}$$
$$I(\text{Vogel}) = \{\text{Kakadu, Kiwi, Ara, Specht}\}$$
$$I(\text{Futter}) = \{\text{Körner, Samen, Würmer, Beeren, Früchte}\}$$
$$I(\text{Groß}) = \{\text{Kakadu, Specht, Ara, Nüsse}\}$$
$$I(\text{Frisst}) = \{(\text{Kakadu, Beeren}), (\text{Kakadu, Samen}), (\text{Kiwi, Früchte}), (\text{Kiwi, Beeren}), (\text{Ara, Würmer}), (\text{Ara, Samen}), (\text{Specht, Körner}), (\text{Specht, Samen}), (\text{Specht, Würmer})\}$$
$$I(\text{beeren}) = \text{Beeren}$$
$$I(\text{samen}) = \text{Samen}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\forall x ((\text{Groß}(x) \wedge \text{Futter}(x)) \supset \text{Frisst}(x, \text{samen}))$

d) $\forall x \exists y (\text{Vogel}(x) \supset (\text{Futter}(y) \wedge \text{Frisst}(x, y)))$

e) $\forall x \exists y (\text{Futter}(x) \supset (\text{Vogel}(y) \wedge \text{Groß}(y) \wedge \text{Frisst}(y, x)))$

f) $\exists x (\text{Vogel}(x) \wedge (\text{Frisst}(x, \text{beeren}) \neq \text{Frisst}(x, \text{samen})))$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Die JavaScript Object Notation (JSON) ist ein kompaktes Datenformat in einer einfach lesbaren Textform zur Übertragung und zum Speichern von strukturierten Daten.¹ JSON kennt folgende Arten von Datenwerten.

Nullwert: wird durch das Schlüsselwort `null` dargestellt.

Boolescher Wert: wird durch die Schlüsselwörter `true` bzw. `false` dargestellt.

Zahl: ist eine Folge der Ziffern 0 bis 9. Diese Folge kann durch ein negatives Vorzeichen (-) eingeleitet und einen Dezimalpunkt (.) unterbrochen sein. Die Zahl kann durch die Angabe eines Exponenten ergänzt werden. Dieser beginnt mit dem Buchstaben `e` oder `E`, danach folgt ein Vorzeichen (+ oder -) und eine Folge der Ziffern 0 bis 9.

Zeichenkette: beginnt und endet mit doppelten geraden Anführungszeichen ("). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass Zeichenketten nur Groß- und Kleinbuchstaben, Ziffern und Bindestriche enthalten können.

Array: beginnt mit [und endet mit]. Es enthält eine durch Beistriche getrennte Liste von Werten gleichen oder verschiedenen Typs. Leere Arrays sind zulässig.

Objekt: beginnt mit { und endet mit }. Es enthält eine durch Beistriche getrennte Liste von Eigenschaften. Objekte ohne Eigenschaften (leere Objekte) sind zulässig. Jede Eigenschaft besteht aus einem Schlüssel und einem Wert, getrennt durch einen Doppelpunkt (Schlüssel: Wert). Der Schlüssel ist eine Zeichenkette, der Wert ist einer der hier beschriebenen Werte (kann auch wieder ein Objekt sein).

Beispiel für ein JSON-Objekt:

¹Inspiziert von https://de.wikipedia.org/wiki/JavaScript_Object_Notation

```

{ "Herausgeber": "Xema",
  "Nummer": "1234-5678-9012-3456",
  "Deckung": 2e+6,
  "Waehrung": "EURO",
  "Inhaber":
  { "Name": "Mustermann",
    "Vorname": "Max",
    "maennlich": true,
    "Hobbys": ["Reiten", "Golfen", "Lesen"],
    "Alter": 42,
    "Kinder": [],
    "Partner": null
  }
}

```

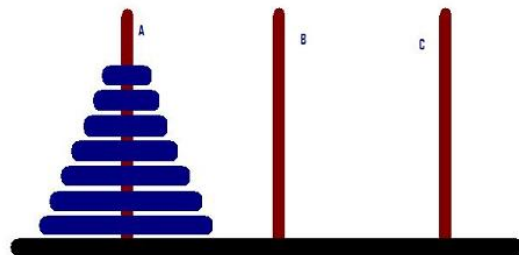
Sei \mathcal{J} die Menge aller Zeichenketten, die ein JSON-Objekt darstellen, wobei wir Leerzeichen und Zeilenumbrüche nicht berücksichtigen.

- Beschreiben Sie die Sprache \mathcal{J} mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren. Verwenden Sie einfache Anführungszeichen zur Kennzeichnung von Terminalsymbolen, da die doppelten Teil der Sprache sind.
- Handelt es sich bei \mathcal{J} um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Die *Türme von Hanoi* sind ein Rätsel, das aus drei senkrechten Stäben (A, B, C) und n gelochten, unterschiedlich großen Scheiben besteht. Zu Beginn befinden sich alle Scheiben nach Größe sortiert auf Stab A , mit der größten zuunterst. Ziel des Spieles ist es, den gesamten Turm auf Stab C zu verschieben.

Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- In jedem Zug wird die oberste Scheibe von einem der Stäbe entfernt und bei einem der anderen Stäbe zuoberst abgelegt.
- Es dürfen nur kleinere auf größere Scheiben gelegt werden.



- Was macht einen Zustand in diesem System aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wieviele verschiedene Zustände gibt es bei n Scheiben? Wie kann man die Zustände eindeutig, aber kompakt bezeichnen?
- Was sind die Übergänge in diesem System? Welche und wieviele gibt es? Wie kann man sie eindeutig, aber kompakt bezeichnen?
- Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses System für $n = 2$ vollständig beschreibt.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Auf Wikipedia ist folgende Definition zu finden:

Eine *links-lineare Grammatik* wird durch ein 4-Tupel $G = (N, \Sigma, P, S)$ beschrieben, wobei

- N und Σ endliche, disjunkte Mengen von Symbolen sind ($N \cap \Sigma = \{\}$),
- S ein Symbol aus N ist ($S \in N$) und
- $P \subseteq N \times (N \cdot \Sigma^* \cup \Sigma^*)$ eine endliche Menge von Paaren ist.

Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt $(x, y) \in P$ wird auch $x \rightarrow y$ geschrieben. Die Notation $x \rightarrow y_1 \mid \dots \mid y_n$ ist eine Abkürzung für die Produktionen $x \rightarrow y_1, \dots, x \rightarrow y_n$.

Seien $u, v \in (N \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter. Das Wort $u y v$ ist aus dem Wort $u x v$ in einem Schritt ableitbar, geschrieben $u x v \Rightarrow u y v$, wenn $x \rightarrow y$ eine Produktion in P ist. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist die Menge $\{w \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow{*} w\}$, wobei $\xRightarrow{*}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von \Rightarrow bezeichnet.²

Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln eine links-lineare Grammatik gemäß der obigen Definition darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort, falls es sich um keine links-lineare Grammatik handelt. Entspricht das Tupel der Definition, geben Sie die Sprache an, die durch die Grammatik generiert wird.

- a) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xab\}, X)$
- b) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}, X)$
- c) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow abX \mid \varepsilon\}, X)$
- d) $(\{a\}, \{X, b\}, \{a \rightarrow abX \mid a\}, a)$
- e) $(\{X, Y\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xa \mid Yb \mid \varepsilon, Y \rightarrow Yb\}, X)$

²Das heißt, dass $\xRightarrow{*}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \xRightarrow{*} v$.
- Es gilt $u \xRightarrow{*} u$ für alle Wörter $u \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Aus $u \xRightarrow{*} v$ und $v \xRightarrow{*} w$ folgt $u \xRightarrow{*} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\xRightarrow{*}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.