3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 SS 2019 21. November 2019

Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe **A**

Aufgabe 1 (10 Punkte) Donald Duck möchte einen neues Auto kaufen. Das Auto soll billig, schön, sicher oder schnell sein, wobei es mindestens zwei dieser Eigenschaften erfüllen soll. Dabei gehen ihm die folgenden Gedanken durch den Kopf:

- Wenn das Auto schnell ist, muss es auf jeden Fall auch schön sein.
- Das Auto ist nicht schön, wenn es billig ist.
- Donald will auf jeden Fall entweder ein sicheres oder ein schnelles Auto, aber nicht beides.
- Das Auto ist nicht gleichzeitig sicher und billig.

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

b) Findet Donald ein Auto, das er kaufen möchte? Wenn ja, welche(s)? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien $\mathit{Besitzt}/2$, $\mathit{Zauberer}/1$, $\mathit{Magisch}/1$ und $\mathit{Waffe}/1$ Prädikatensymbole sowie *schwert* und *stab* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$$\begin{array}{llll}
\mathit{Zauberer}(x) & \ldots\ x \text{ ist ein Zauberer} & \mathit{Besitzt}(x,y) & \ldots\ x \text{ besitzt } y \\
\mathit{Magisch}(x) & \ldots\ x \text{ ist magisch} & \mathit{schwert} & \ldots\ \text{Schwert} \\
\mathit{Waffe}(x) & \ldots\ x \text{ ist eine Waffe} & \mathit{stab} & \ldots\ \text{Zauberstab}
\end{array}$$

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Kein Zauberer besitzt sowohl ein Schwert als auch einen Zauberstab.

b) Es gibt Zauberer, die alle magischen Waffen besitzen.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Draco}, \text{Harry}, \text{Hermine}, \text{Ron}, \text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Kessel}, \text{Teppich}, \\
&\quad\ \text{Schwert}, \text{Pistole}, \text{Zaubertrank}\} \\
I(\mathit{Zauberer}) &= \{\text{Harry}, \text{Hermine}, \text{Ron}\} \\
I(\mathit{Magisch}) &= \{\text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Kessel}, \text{Teppich}\} \\
I(\mathit{Waffe}) &= \{\text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Schwert}, \text{Pistole}, \text{Zaubertrank}\} \\
I(\mathit{Besitzt}) &= \{(\text{Harry}, \text{Drache}), (\text{Harry}, \text{Schwert}), (\text{Harry}, \text{Zauberstab}), (\text{Harry}, \text{Kessel}), \\
&\quad\ (\text{Harry}, \text{Teppich}), (\text{Draco}, \text{Zaubertrank}), (\text{Draco}, \text{Drache}), \\
&\quad\ (\text{Hermine}, \text{Drache}), (\text{Hermine}, \text{Zauberstab}), (\text{Hermine}, \text{Schwert}), \\
&\quad\ (\text{Ron}, \text{Kessel}), (\text{Ron}, \text{Drache}), (\text{Ron}, \text{Zauberstab})\} \\
I(\mathit{schwert}) &= \text{Schwert} \qquad I(\mathit{stab}) = \text{Zauberstab} \qquad I(\mathit{drache}) = \text{Drache}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\exists x\,(\mathit{Zauberer}(x) \land \forall y\,(\mathit{Magisch}(y) \supset \mathit{Besitzt}(x,y)))$

d) $\forall x(\mathit{Zauberer}(x) \land \mathit{Besitzt}(x,\mathit{stab}))$

e) $\exists x\,(\mathit{Zauberer}(x) \land \mathit{Besitzt}(x,\mathit{drache}) \land \neg \mathit{Besitzt}(x,\mathit{schwert}))$

f) $\forall x(\mathit{Besitzt}(x,\mathit{stab}) \lor \mathit{Besitzt}(x,\mathit{drache}))$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es stehen drei Wasserkrüge mit einem Fassungsvermögen von 3, 5 bzw. 7 Litern zur Verfügung, von denen zu Beginn der kleinste und der größte Krug vollständig gefüllt und der mittlere leer ist. Die Krüge sollen nun ohne Wasserverlust so umgefüllt werden, dass sich am Ende in einem der Krüge genau ein Liter befindet.
Modellieren Sie dieses Problem mit Hife eines endlichen Automaten.

a) Wodurch werden die Zustände des Systems charakterisiert, wie lassen sie sich eindeutig beschreiben? Was ist der Startzustand, was sind die Endzustände? Schätzen Sie die Zahl der benötigten Zustände möglichst genau ab.

   Hinweis: Durch das Umfüllen geht kein Wasser verloren. Weiters ist nach jedem Umfüllvorgang einer der beteiligten Krüge leer oder voll.

b) Wie lassen sich die Zustandsübergänge in diesem System beschreiben? Legen Sie das Alphabet des Automaten fest. Welche Bedeutung besitzt die zum Automaten gehörige Sprache, d.h., was geben die Wörter in dieser Sprache an?

   Wählen Sie das Alphabet möglichst klein, aber groß genug, sodass sich aus den Wörtern über diesem Alphabet die Abläufe im System rekonstruieren lassen. Sie sollten also weder jedem Übergang zwischen zwei Zuständen ein eigenes Symbol zuordnen (das Symbol repräsentiert dann nur genau diesen einen Übergang) noch sollten Sie alle Übergänge mit demselben Symbol beschriften, da sich damit die Abläufe im System nicht beschreiben lassen.

c) Geben Sie einen endlichen Automaten für das Problem an. Der Automat soll das gesamte System modellieren, nicht nur einen möglichen Lösungsweg.

d) Geben Sie zwei Wörter an, die dieser Automat akzeptiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei Σ das Alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{h},\mathtt{n},\mathtt{s}\}$ und L die Menge aller Wörter über Σ, die entweder mit `hans` oder `anna` enden. Beispiele für solche Wörter sind `hans` und `anna` selber, aber auch die Wörter `hahahans` und `hanna` liegen in L.

a) Geben Sie einen Posix Extended Regular Expression an, der die Sprache L beschreibt.

b) Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten an, der die Sprache L akzeptiert. Der Automat soll der Definition der Sprache direkt entsprechen, sodass die Korrektheit der Modellierung unmittelbar einsichtig ist.

c) Konstruieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen Determinisierungsverfahrens zu Ihrem nichtdeterministischen Automaten einen äquivalenten deterministischen.

Aufgabe 5 (10 Punkte) In Büchern über formale Sprachen ist folgende Definition zu finden:

> Eine *monotone Grammatik* wird durch ein 4-Tupel $G = \langle V, T, S, P \rangle$ festgelegt, wobei
>
> - V und T endliche, disjunkte Mengen von Symbolen sind ($V \cap T = \{\}$),
> - S ein Symbol aus V ist ($S \in V$) und
> - P eine endliche Menge von Paaren (x, y) ist, wobei $x, y \in (V \cup T)^+$ und $|x| \leq |y|$ gilt.[1]
>
> Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt $(x, y) \in P$ wird auch $x \to y$ geschrieben. Die Notation $x \to y_1 \mid \cdots \mid y_n$ ist eine Abkürzung für die Produktionen $x \to y_1, \ldots, x \to y_n$.
>
> Das Wort $u\,y\,v$ ist aus dem Wort $u\,x\,v$ in einem Schritt ableitbar, geschrieben $u\,x\,v \Rightarrow u\,y\,v$, wenn $x \to y$ gilt. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist definiert als die Menge $\{\, w \in T^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \,\}$, wobei $\overset{*}{\Rightarrow}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Rightarrow$ bezeichnet.[2]

Überprüfen Sie, welche der folgenden Tupeln eine monotone Grammatik gemäß der obigen Definition darstellen. Begründen Sie Ihre Antwort, falls es sich um keine monotone Grammatik handelt. Entspricht das Tupel der Definition, geben Sie die Sprache an, die durch die Grammatik generiert wird.

a) $\langle \{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{ab}, \mathtt{ab} \to \mathtt{aba}\} \rangle$

b) $\langle \{\mathtt{S}, \mathtt{a}\}, \{\mathtt{b}\}, \mathtt{S}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{ab}, \mathtt{ab} \to \mathtt{aba}\} \rangle$

c) $\langle \{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{a\,S\,b} \mid \varepsilon\} \rangle$

d) $\langle \{\mathtt{b}\}, \{\mathtt{S}, \mathtt{a}\}, \mathtt{b}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{ab}, \mathtt{b} \to \mathtt{aba}\} \rangle$

---

[1] $|x|$ bezeichnet die Anzahl der Zeichen in x. Die Bedingung $|x| \leq |y|$ bedeutet also, dass y nicht kürzer sein darf als x.

[2] Das heißt, dass $\overset{*}{\Rightarrow}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.
- Es gilt $u \overset{*}{\Rightarrow} u$ für alle Wörter $u \in T^*$.
- Aus $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ und $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\overset{*}{\Rightarrow}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.