3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 SS 2018 22. November 2018

Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe
			A

Aufgabe 1 (10 Punkte) Nach einem Banküberfall befragt Kommissar Klever Zeugen in der Hoffnung, eine möglichst genaue Täterbeschreibung zu bekommen. Er hält folgende Aussagen zum Täter fest:

Z1: Er hatte schwarze Haare.

Z2: Er hatte einen Bart oder einen Rucksack.

Z3: Wenn er einen Rucksack hatte, dann hatte er auch eine Kappe. Wenn er einen Bart hatte, dann hatte er keine Kappe.

Z4: Unsinn, er hatte sicher nicht beides, Kappe und Rucksack!

Z5: Wenn er gehumpelt ist, dann hatte er entweder schwarze Haare oder eine Kappe (beides sicher nicht).

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Wie hat der Täter ausgesehen, wenn man diesen Aussagen Glauben schenkt? Welche Varianten sind möglich? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Seien *Pflanzt*, *Alt*, *Baum* und *Gärtner* Prädikatensymbole und *palme* ein Konstantensymbol mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Pflanzt}(x, y)$	... x pflanzt y	$\mathit{Gärtner}(x)$	... x ist ein Gärtner
$\mathit{Baum}(x)$	... x ist ein Baum	palme	... Palme
$\mathit{Alt}(x)$	... x ist alt		

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Es gibt alte Bäume, die von allen Gärtnern gepflanzt werden.

b) Alle Gärtner pflanzen mindestens einen Baum.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Hinz}, \text{Kunz}, \text{Krethi}, \text{Plethi}, \text{Kurt}, \text{Tanne}, \\
&\quad\ \text{Zirbe}, \text{Birke}, \text{Ahorn}, \text{Palme}\} \\
I(\mathit{Gärtner}) &= \{\text{Hinz}, \text{Kunz}, \text{Kurt}\} \\
I(\mathit{Alt}) &= \{\text{Hinz}, \text{Kurt}, \text{Zirbe}, \text{Birke}\} \\
I(\mathit{Baum}) &= \{\text{Tanne}, \text{Zirbe}, \text{Birke}, \text{Ahorn}\} \\
I(\mathit{Pflanzt}) &= \{(\text{Hinz}, \text{Palme}), (\text{Hinz}, \text{Ahorn}), \\
&\quad\ (\text{Kunz}, \text{Palme}), (\text{Kunz}, \text{Birke}), (\text{Kunz}, \text{Tanne}), \\
&\quad\ (\text{Kurt}, \text{Palme}), (\text{Plethi}, \text{Palme}), (\text{Krethi}, \text{Palme}), \\
&\quad\ (\text{Zirbe}, \text{Palme}), (\text{Zirbe}, \text{Ahorn})\} \\
I(\mathit{palme}) &= \text{Palme}
\end{aligned}
$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\exists x\, (\mathit{Alt}(x) \land \exists y\, (\mathit{Baum}(y) \land \mathit{Pflanzt}(x, y)))$

d) $\forall x\, \mathit{Pflanzt}(x, \mathit{palme})$

e) $\exists x\, (\mathit{Baum}(x) \land \mathit{Alt}(x) \land \mathit{Pflanzt}(x, \mathit{palme}))$

f) $\forall x\, (\mathit{Baum}(x) \supset \exists y\, (\mathit{Gärtner}(y) \land \mathit{Pflanzt}(x, y)))$

Aufgabe 3 (10 Punkte) In einer Kurzparkzone darf maximal 2 Stunden geparkt werden. Dazu muss zuvor bei einem Parkscheinautomaten ein Ticket gekauft werden. 15 Minuten Parken kosten 50 Cent. Der Automat akzeptiert 50-Cent-, 1-Euro- und 2-Euro-Münzen. Je nachdem, wieviel Geld eingeworfen wurde, erhöht sich die Parkdauer auf bis zu 2 Stunden. Nach jedem Münzeinwurf zeigt der Automat das aktuelle Zeitguthaben an (das aber 2 Stunden nicht überschreitet). Dann kann eine weitere Münze eingeworfen oder mit dem „Drucken"-Knopf das Ticket gedruckt werden. Der Automat gibt kein Wechselgeld zurück. Durch Drücken der „Storno"-Taste erhält man das gesamte eingeworfene Geld wieder zurück. Nach beiden Tasten geht der Automat wieder in den Startzustand zurück.
Modellieren Sie den Parkscheinautomaten mit Hilfe eines Moore-Automaten. Es ist nicht notwendig, die Ausgabe der verschieden beschrifteten Tickets bzw. bei einem Storno die Rückgabe der verschiedenen Geldbeträge zu modellieren.

a) Welche Zustände benötigt der Automat? Was kennzeichnet einen Zustand?

b) Welche Eingaben muss der Automat verarbeiten?

c) Was sind die Ausgaben des Automaten?

d) Geben Sie den Moore-Automaten in graphischer oder tabellarischer Form an.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Mit den drei Zeichen `/`, `_` und `\` lassen sich Bergsilhouetten[1] skizzieren, wie etwa die folgende:

[1] *Silhouette* ist ein anderes Wort für *Umriss*.

```
            _
         /\/ \_
      /\/      \
   __/          \_
 _/               \
/                  \___/\_
```

Diese Silhouette lässt sich platzsparender auch in eine einzige Zeile zusammenschieben (komprimieren):

`/_/__//\//\/_\_\\_\\___/\_`

Wir legen fest, dass Silhouetten immer auf derselben Grundlinie aufhören, auf der sie begonnen haben, und dass kein Teil der Silhouette unter dieser Grundlinie liegt. Weiters kann es auf jeder Höhe beliebig breite Plateaus (Ebenen) geben. Ob die leere Silhouette bereits eine Silhouette darstellt, bleibt Ihnen überlassen.[2]
Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Zeichenketten, die eine Silhouette in komprimierter Form darstellen.

a) Beschreiben Sie die Sprache $\mathcal{S}$ mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

b) Ist die leere Silhouette laut Ihrer Grammatik eine zulässige Silhouette? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass die komprimierte Silhouette `//\/_\_\` in der Sprache Ihrer Grammatik liegt.

d) Handelt es sich bei $\mathcal{S}$ um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (10 Punkte) In wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Bereich der formalen Sprachen ist folgende Definition zu finden:

> Eine *pure Grammatik* G ist ein 3-Tupel $\langle \Sigma, P, S \rangle$, wobei Σ ein endliches Alphabet, $S \subseteq \Sigma^*$ eine endliche Menge von Wörtern über Σ und $P \subseteq \Sigma \times \Sigma^*$ eine endliche Menge von Wortpaaren ist. Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt (x, y) wird auch $x \to y$ geschrieben.
>
> Das Wort uyv ist aus dem Wort uxv in einem Schritt ableitbar, geschrieben $uxv \Rightarrow uyv$, wenn P die Produktion $x \to y$ enthält, wobei u und v beliebige Wörter aus Σ^* sein können. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist definiert als die Menge $\{\, w \in \Sigma^* \mid s \overset{*}{\Rightarrow} w \text{ für ein Wort } s \in S \,\}$, wobei $\overset{*}{\Rightarrow}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Rightarrow$ bezeichnet.[3]

a) Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln der Form nach pure Grammatiken sind. Begründen Sie Ihre Antwort, wenn das Tupel keine pure Grammatik darstellt.

[2] Inspiriert von einer Aufgabe von M.Schmidt-Schauß, Goethe-Universität Frankfurt.

[3] Das heißt, dass $\overset{*}{\Rightarrow}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.
- Es gilt $u \overset{*}{\Rightarrow} u$ für alle Wörter $u \in \Sigma^*$.
- Aus $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ und $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\overset{*}{\Rightarrow}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.

i. $\langle\{\mathtt{S},\mathtt{A}\},\ \{\mathtt{S}\rightarrow\mathtt{SA}\},\ \mathtt{S}\rangle$

ii. $\langle\{\mathtt{S},\mathtt{A}\},\ \{\mathtt{S}\rightarrow\mathtt{SA}\},\ \{\mathtt{A}\}\rangle$

iii. $\langle\{\mathtt{S}\},\ \{\mathtt{S}\rightarrow\mathtt{aSb},\ \mathtt{S}\rightarrow\varepsilon\},\ \{\mathtt{S}\}\rangle$, wobei ε für das Leerwort steht.

iv. $\langle\{\mathtt{S},\mathtt{a},\mathtt{b}\},\ \{\mathtt{S}\rightarrow\mathtt{aSb},\ \mathtt{S}\rightarrow\varepsilon\},\ \{\mathtt{aS},\mathtt{Sb}\}\rangle$, wobei ε für das Leerwort steht.

b) Sei G die pure Grammatik $\langle\{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\ \{\mathtt{a}\rightarrow\mathtt{ab}\},\ \{\mathtt{ab},\mathtt{ba}\}\rangle$. Zeigen Sie, dass das Wort `babb` in der von G generierten Sprache liegt. Wie sehen die Wörter in $\mathcal{L}(G)$ aus? Beschreiben Sie $\mathcal{L}(G)$ mit Hilfe eines regulären Ausdrucks.