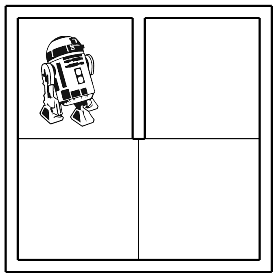
3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 SS 2015/WS 2015 15. Dezember 2015

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
			A

Aufgabe 1 (10 Punkte) Der Roboter R2-D2 wird in eine Höhle abgeseilt, um sie zu erkunden. Sein Kollege C-3PO gibt ihm von oben Anweisungen, was er tun soll, und zwar entweder auf der Stelle eine Vierteldrehung nach links durchführen, oder eine Vierteldrehung nach rechts, oder aber einen Schritt nach vorn machen. Nachdem R2-D2 die Aktion ausgeführt hat, meldet er, was er vor sich sieht: Wand oder Gang. Falls er bei einem Schritt mit der Wand kollidiert, meldet er eine Kollision.

Nehmen Sie an, dass die Höhle so aussieht wie rechts skizziert, dass sich R2-D2 zu Beginn im linken oberen Feld befindet und dass er in Richtung freies Feld (Gang) blickt. Die doppelten Linien markieren Wände. In jedem kollisionsfreien Schritt bewegt sich R2-D2 um ein Feld vorwärts.
Erhält R2-D2 beispielsweise die Anweisungen „Schritt vor“, „Schritt vor“, „Drehung links“ und „Schritt vor“, meldet er „Wand“, „Kollision“, „Gang“ und „Wand“ und befindet sich zuletzt im Feld rechts unten.



a) Überlegen Sie, welche Informationen notwendig sind, um die momentane Situation von R2-D2 in der Höhle zu beschreiben. Wieviele Zustände kann das Roboter-Höhle-System annehmen? Wieviele Zustände sind es im Allgemeinen, wenn die Höhle b Felder breit und l Felder lang ist? Wie lassen sich die Zustände kompakt bezeichnen?

b) Legen Sie die Aktionen fest, die zu einem Zustandswechsel führen, sowie die möglichen Reaktionen von R2-D2. Definieren Sie ein entsprechendes Ein- und Ausgabealphabet.

c) Geben Sie einen Mealy-Automaten an, der das Roboter-Höhle-System vollständig beschreibt. Sie können den Automaten graphisch oder tabellarisch spezifizieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $\mathcal{M}$ folgende Teilmenge der Anweisungen der Programmiersprache MODULA.

- Zuweisungen haben die Form b `:=` a
  b ist ein Bezeichner, der mit einem Buchstaben beginnt und auf den beliebig viele Buchstaben und Ziffern folgen können. a steht für einen Ausdruck.

- Blöcke besitzen die Form `BEGIN` m_1`;` $\ldots$`;` m_n `END`
  Dabei können $m_1, \ldots, m_n$ ($n \geq 1$) beliebige Anweisungen aus $\mathcal{M}$ sein, die durch einen Strichpunkt getrennt werden.

- Konditionale können folgende Formen annehmen:

  IF a_1 THEN f_1 END
  IF a_1 THEN f_1 ELSE f_2 END
  IF a_1 THEN f_1 ELSIF a_2 THEN f_2 END
  IF a_1 THEN f_1 ELSIF a_2 THEN f_2 ELSE f_3 END
  IF a_1 THEN f_1 ELSIF a_2 THEN f_2 ELSIF a_2 THEN f_3 END
  IF a_1 THEN f_1 ELSIF a_2 THEN f_2 ELSIF a_2 THEN f_3 ELSE f_4 END
  $\vdots$

  Das heißt, dem If-Teil folgt immer ein Then-Teil, dann kommt eine beliebige Zahl von Elsif-Teilen, und zuletzt kann optional ein Else-Teil folgen. a_i steht dabei für Ausdrücke, f_i für Anweisungsfolgen der Form m_1 ; ... ; m_n, wie sie auch bei Blöcken vorkommen.

- Exit-Anweisungen bestehen nur aus dem Schlüsselwort `EXIT`.

- Schleifen sehen genauso aus wie Blöcke, außer dass das Schlüsselwort `LOOP` das Wort `BEGIN` ersetzt.

Beispiel eines Programms in $\mathcal{M}$:

```
LOOP
  X1 := a1;
  IF a2 THEN EXIT
  ELSIF a3 THEN X2 := a4
  END
END
```

Beschreiben Sie die Sprache $\mathcal{M}$ aller derartigen Anweisungen mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie so weit wie möglich EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu halten und rekursive Regeln zu vermeiden.
Nehmen Sie an, dass es bereits Produktionen gibt, die es ermöglichen, aus dem Nonterminal *Ausdruck* die zulässigen Ausdrücke (wie a_1, a_2, ...) zu erzeugen. Es ist nicht notwendig, Leerzeichen und ähnliches (*white space*) zu berücksichtigen.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Schneewittchen möchte in die Stadt einkaufen gehen, benötigt dafür aber mindestens zwei Zwerge als Geleitschutz. Sneezy, Bashful und Dopey müssen Holz hacken und scheiden als Begleitung aus. Die anderen vier diskutieren, wer mit in die Stadt geht.

Grumpy: „Wir können Doc und Sleepy nicht gemeinsam gehen lassen.“
Doc: „Wenn ich gehe, dann muss Happy mitkommen!“
Happy: „Ich gehe nur, wenn ich nicht gemeinsam mit Grumpy gehen muss.“
Sleepy: „Ich komme dann und nur dann mit, wenn mich Happy oder Doc begleiten.“

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der Aussagenvariablen an.

b) Können sich die Zwerge entscheiden, wer Schneewittchen begleitet? Wenn ja, wer kommt als Begleitung in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien $\mathit{Besitzt}/2$, $\mathit{Zauberer}/1$, $\mathit{Magisch}/1$ und $\mathit{Waffe}/1$ Prädikatensymbole sowie *schwert* und *stab* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Zauberer}(x)$	... x ist ein Zauberer	$\mathit{Besitzt}(x, y)$	... x besitzt y
$\mathit{Magisch}(x)$	... x ist magisch	*schwert*	... Schwert
$\mathit{Waffe}(x)$	... x ist eine Waffe	*stab*	... Zauberstab

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Kein Zauberer besitzt sowohl ein Schwert als auch einen Zauberstab.

b) Es gibt Zauberer, die alle magischen Waffen besitzen.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Draco}, \text{Harry}, \text{Hermine}, \text{Ron}, \text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Kessel}, \text{Teppich}, \\
&\quad\ \text{Schwert}, \text{Pistole}, \text{Zaubertrank}\} \\
I(\mathit{Zauberer}) &= \{\text{Harry}, \text{Hermine}, \text{Ron}\} \\
I(\mathit{Magisch}) &= \{\text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Kessel}, \text{Teppich}\} \\
I(\mathit{Waffe}) &= \{\text{Zauberstab}, \text{Drache}, \text{Schwert}, \text{Pistole}, \text{Zaubertrank}\} \\
I(\mathit{Besitzt}) &= \{(\text{Harry}, \text{Drache}), (\text{Harry}, \text{Schwert}), (\text{Harry}, \text{Zauberstab}), (\text{Harry}, \text{Kessel}), \\
&\quad\ (\text{Harry}, \text{Teppich}), (\text{Draco}, \text{Zaubertrank}), (\text{Draco}, \text{Drache}), \\
&\quad\ (\text{Hermine}, \text{Drache}), (\text{Hermine}, \text{Zauberstab}), (\text{Hermine}, \text{Schwert}), \\
&\quad\ (\text{Ron}, \text{Kessel}), (\text{Ron}, \text{Drache}), (\text{Ron}, \text{Zauberstab})\} \\
I(\mathit{schwert}) &= \text{Schwert} \qquad I(\mathit{stab}) = \text{Zauberstab} \qquad I(\mathit{drache}) = \text{Drache}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\exists x\, (\mathit{Zauberer}(x) \land \forall y\, (\mathit{Magisch}(y) \supset \mathit{Besitzt}(x, y)))$

d) $\forall x(\mathit{Zauberer}(x) \land \mathit{Besitzt}(x, \mathit{stab}))$

e) $\exists x\, (\mathit{Zauberer}(x) \land \mathit{Besitzt}(x, \mathit{drache}) \land \neg \mathit{Besitzt}(x, \mathit{schwert}))$

f) $\forall x(\mathit{Besitzt}(x, \mathit{stab}) \lor \mathit{Besitzt}(x, \mathit{drache}))$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Formeln

$$(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \quad \text{und} \quad (A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)$$

logisch äquivalent sind. Verwenden Sie die Axiome der Boolschen Algebra für $\land$, $\lor$ und $\neg$, keine Wahrheitstafel. Die Feststellung, dass laut Vorlesung beide Formeln dasselbe wie $A \not\equiv B$ sind, ist kein Beweis.

b) Zeigen Sie, dass die Formeln

$$\neg \exists x(P(x) \land \forall y(Q(y) \supset R(x, y))) \quad \text{und} \quad \forall y \exists x(\neg P(y) \lor (Q(x) \land \neg R(y, x)))$$

logisch äquivalent sind.