

<b>3.0/2.0 VU Formale Modellierung</b>			
185.A06		WS 2014/SS 2015	8. September 2015
Matrikelnummer	Familiename	Vorname	Gruppe <b>A</b>

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Zahlen werden im Ternärsystem (Dreiersystem) durch Folgen der Zeichen 0, 1 und 2 dargestellt, wobei die einzelnen Stellen mit Potenzen von 3 gewichtet werden. Etwa repräsentiert das Ternärnumeral 1201

- die Zahl  $1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 = 34$ , wenn das Numeral mit der niedrigstwertigen Stelle beginnt, bzw.
- die Zahl  $1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 46$ , wenn das Numeral mit der höchstwertigen Stelle beginnt.

a) Geben Sie einen Mealy-Automaten an, der die Summe zweier Ternärnumerae gleicher Länge berechnet und wieder als Ternärnumeral ausgibt. Nehmen Sie an, dass die Numerale mit der *niedrigstwertigen* Stelle beginnen.

Beispiel: Die Eingabe der Addition  $\begin{smallmatrix} 122 \\ 120 \end{smallmatrix}$  führt zur Ausgabe 210, da:  $1 + 1 = 2$  ohne Übertrag;  $2 + 2 = 1$  mit Übertrag 1;  $2 + 0 + \text{Übertrag} = 0$  mit Übertrag 1. Folgt als weitere Spalte  $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ , wird wegen des Übertrags der bisherigen Rechnung als nächstes Symbol 1 ausgegeben.

Welche Bedeutung besitzen die Zustände sowie die Ein- und Ausgabesymbole Ihres Automaten?

Wieviele Zustände benötigen Sie im Allgemeinen, wenn der Automat zwei Numerale zur Basis  $n > 3$  addieren soll? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie einen Transducer an, der die Summe von Ternärnumeralen gleicher Länge berechnet, die mit der *höchstwertigen* Stelle beginnen. Beispielsweise sind die Paare  $(\begin{smallmatrix} 102 \\ 020 \end{smallmatrix}, 122)$  und  $(\begin{smallmatrix} 122 \\ 120 \end{smallmatrix}, 1012)$  in der Übersetzungsrelation des Transducers enthalten, da  $102_3 + 020_3 = 122_3$  bzw.  $122_3 + 120_3 = 1012_3$  gilt.

Welche Zustände benötigen Sie nun, welche Bedeutung haben sie?

Hinweis: Transducer dürfen in jeder Hinsicht indeterministisch sein: sie können mehrere Folgezustände für eine Eingabe besitzen, und es ist auch das Leerwort als Ein- bzw. Ausgabe erlaubt.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Eisenbahnstrecken werden aus Sicherheitsgründen in Abschnitte unterteilt, in denen sich jeweils höchstens ein Zug befinden darf. Jeder Abschnitt wird durch eine Ampel gesichert, die nur dann grün ist, wenn der Abschnitt frei ist. Ein Zug darf nur dann in den nächsten Abschnitt einfahren, wenn die Ampel grün ist.

a) Geben Sie ein Petri-Netz an, das eine Eisenbahnstrecke zwischen zwei Bahnhöfen  $A$  und  $B$  modelliert, die in zwei solche Abschnitte unterteilt ist. Nehmen Sie an, dass sich zu Beginn zwei Zügen im Bahnhof  $A$  befinden.

Erklären Sie die Bedeutung der Stellen und der Transitionen Ihres Petri-Netzes.

- b) Geben Sie alle möglichen Markierungen an, die von der Startmarkierung aus erreichbar sind, sowie ihre Reihenfolge. (Verwenden Sie eine geeignete Kurznotation für die Markierungen; es ist nicht notwendig, das vollständige Petri-Netz zu kopieren.)

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Heinz F. möchte das Äußere seines Hauses, das aus *Tür*, *Fensterrahmen*, *Wand* und *Dach* besteht, neu streichen. Als Patriot will er für jeden dieser vier Bereiche nur eine der Farben *rot* oder *weiß* verwenden. Heinz stellt folgende Überlegungen an:

„Mindestens einer der vier Bereiche soll weiß sein, und mindestens zwei davon rot. Die Wand soll nur dann weiß sein, wenn die Tür rot ist. Tür und Fensterrahmen sollen aber nicht beide rot sein. Dach und Wand sollen jedenfalls nicht dieselbe Farbe erhalten.“

- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.
- b) Welche Möglichkeiten hat Heinz unter diesen Umständen für die Farben von Tür, Fensterrahmen, Wand und Dach? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Seien *SpieltMit*/2, *Vater*/1 und *Kind*/1 Prädikatensymbole sowie *albrecht* und *frieda* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

<i>SpieltMit</i> ( $x, y$ )	... $x$ spielt mit $y$	<i>albrecht</i>	... Albrecht
<i>Vater</i> ( $x$ )	... $x$ ist ein Vater	<i>frieda</i>	... Frieda
<i>Kind</i> ( $x$ )	... $x$ ist ein Kind		

Verwenden Sie diese Symbole, um die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Alle Väter, die mit Albrecht spielen, spielen auch mit Frieda.
- b) Manche Kinder spielen mit allen Vätern.

Sei weiters folgende Interpretation  $I$  gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\text{Albrecht, Bogdan, Erich, Frieda, Kathrin, Nina, Tamara}\} \\ I(\text{Vater}) &= \{\text{Bogdan, Erich}\} \\ I(\text{Kind}) &= \{\text{Albrecht, Frieda, Nina}\} \\ I(\text{SpieltMit}) &= \{(\text{Albrecht, Frieda}), (\text{Bogdan, Albrecht}), (\text{Erich, Albrecht}), (\text{Erich, Frieda}), \\ &\quad (\text{Frieda, Nina}), (\text{Frieda, Kathrin}), (\text{Frieda, Albrecht}), (\text{Nina, Frieda}), \\ &\quad (\text{Tamara, Erich}), (\text{Tamara, Bogdan}), (\text{Tamara, Albrecht})\}, \\ I(\text{albrecht}) &= \text{Albrecht} \quad I(\text{frieda}) = \text{Frieda} \end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation  $I$  wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

- c)  $\forall x (\text{Vater}(x) \supset \exists y (\text{Kind}(y) \wedge \text{SpieltMit}(x, y)))$
- d)  $\forall x (\text{Vater}(x) \wedge \text{SpieltMit}(x, \text{albrecht}))$
- e)  $\exists x (\text{Kind}(x) \wedge \forall y (\text{Kind}(y) \supset \text{SpieltMit}(x, y)))$
- f)  $\forall x (\text{SpieltMit}(x, \text{frieda}) \neq \text{SpieltMit}(x, \text{albrecht}))$

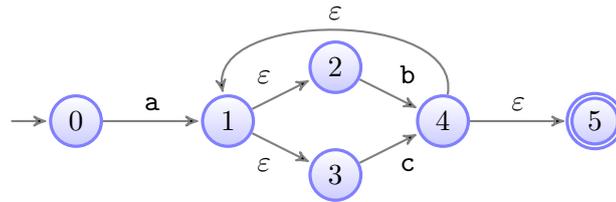
**Aufgabe 5 (10 Punkte)** Zu jedem nicht-deterministischen Automaten  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit der Übergangsrelation  $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$  definieren wir einen Automaten  $\hat{\mathcal{A}} = \langle Q, \Sigma, \hat{\delta}, q_0, \hat{F} \rangle$  mit geänderter Übergangsrelation  $\hat{\delta} \subseteq Q \times \Sigma \times Q$  und geänderter Endzustandsmenge  $\hat{F} \subseteq Q$ :

$$\hat{\delta} = \{ (q, s, q') \in (Q \times \Sigma \times Q) \mid (q, s, q') \in \delta^* \}$$

$$\hat{F} = \{ q \in Q \mid (q, \varepsilon, q_f) \in \delta^*, q_f \in F \}$$

( $\delta^*$  bezeichnet die erweiterte Übergangsrelation zur ursprünglichen Übergangsrelation  $\delta$ ).

a) Konstruieren Sie den Automaten  $\hat{\mathcal{A}}$  zu folgendem Automaten  $\mathcal{A}$ .



b) In welchem Zusammenhang steht im Allgemeinen der zu einem Automaten  $\mathcal{A}$  so konstruierte Automaten  $\hat{\mathcal{A}}$ ? Welche Sprache akzeptiert er, welche Eigenschaften besitzt er?