3.0/2.0 VU Formale Modellierung 185.A06 WS 2014/SS 2015 27. Mai 2015			
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe **A**

Aufgabe 1 (10 Punkte) Ein elektronisches Tresorschloss besteht aus einem zweistelligen Display sowie den Tasten `+`, `L`, `R`, `Ok` und `Reset`. Jede Stelle des Displays kann eine der drei Ziffern 0, 1 oder 2 anzeigen. Mit jedem Drücken der `+`-Taste ändert sich die Anzeige der aktiven Stelle von 0 auf 1, von 1 auf 2 bzw. von 2 auf 0. Welche der beiden Stellen aktiv ist, lässt sich durch die `L`- und `R`-Taste kontrollieren: Ein- oder mehrmaliges Drücken der `L`- bzw. `R`-Taste aktiviert die linke bzw. rechte Stelle. Im Anfangszustand zeigt das Display die Zahl 00 an und die linke Stelle ist aktiviert. Wird die Zahl 21 eingestellt und anschließend die `Ok`-Taste gedrückt, öffnet das Schloss; bei jeder anderen Zahl geht das Schloss in einen Fehlerzustand. Sowohl im geöffneten Zustand als auch im Fehlerzustand werden alle weiteren Tasten ausgenommen `Reset` ignoriert, d.h., sie beeinflussen den Zustand des Schlosses nicht. Wird zu einem beliebigen Zeitpunkt die `Reset`-Taste gedrückt, geht das Schloss wieder in den Anfangszustand über. Das Schloss lässt sich zum Beispiel mit jeder der beiden folgenden Tastenkombinationen öffnen:

```
+ + R + Ok
+ Reset + L R + L + Ok Ok
```

- Überlegen Sie, welche Informationen notwendig sind, um den Zustand des Schlosses zu beschreiben. Wieviele Zustände kann das Schloss annehmen? Wieviele Zustände sind es im Allgemeinen, wenn das Schloss n Ziffern (statt 3) pro Stelle sowie k Stellen (statt 2) besitzt?
- Legen Sie die möglichen Aktionen fest, die zu einem Zustandswechsel führen.
- Geben Sie einen endlichen Automaten an, der das Verhalten des beschriebenen Schlosses vollständig beschreibt. Die Sprache des Automaten sollen genau jene Tastenkombinationen sein, die den Tresor öffnen. Spezifizieren Sie die Übergangsfunktion des Automaten mittels einer Tabelle.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Der Lambdakalkül (oder λ-Kalkül) ist eines der Modelle für Berechenbarkeit. Jede mit einem Computer berechenbare Funktion lässt sich durch einen Ausdruck im Lambdakalkül (einen sogenannten λ-Term) darstellen und berechnen.
Es gibt drei Arten von λ-Termen. Zunächst ist bereits jede *Variable* ein solcher. (Treffen Sie geeignete Annahmen über die zulässigen Variablenbezeichnungen.) Weiters können mittels λ-*Abstraktion* anonyme (d.h., unbenannte) Funktionen definiert werden, die eine Variable als Parameter besitzen; diese wird später bei der Abarbeitung im zugehörigen λ-Term ersetzt. λ-Abstraktionen werden mit dem Zeichen „λ“ eingeleitet; ein Punkt trennt die Variable vom zugehörigen λ-Term. Eine *Applikation* steht für die Anwendung einer Funktion auf ein Argument und besteht aus zwei aufeinanderfolgenden λ-Termen, einem für die Funktion und einem für das Argument. Getrennt werden die beiden Terme durch ein Leerzeichen. λ-Abstraktionen und Applikationen werden geklammert.

Beispiele zulässiger λ-Terme:

$(\lambda x.x)$	λ-Abstraktion
$(x\ y)$	Applikation, bei der x auf y angewendet wird.
$((x\ y)\ z)$	Applikation, bei der das Ergebnis von $(x\ y)$ auf z angewendet wird.
$(\lambda x.(\lambda x.(x\ y)))$	λ-Term mit zwei λ-Abstraktionen und einer Applikation.

a) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge der λ-Terme an.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Menge der λ-Terme an. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu halten.

c) Zeigen Sie, dass der λ-Term $(\lambda x.(\lambda y.((x\ (\lambda z.y))\ z)))$ in der Sprache Ihrer Grammatik liegt.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Amelie hat für die Kinopremiere von „Godzilla – jetzt erst recht!“ vier Karten gewonnen. Sie überlegt, welche ihrer fünf Freunde Lisa, Sophie, Anna, Kurt und Max sie mitnehmen soll:
„Lisa hat mich letztes Mal auch mitgenommen, sie kommt auf jeden Fall mit! Max und Anna sind erst seit kurzem ein Paar; Anna kommt sicher nur dann mit, wenn ich Max auch einlade. Außer Lisa möchte ich jedenfalls ein weiteres Mädchen dabei haben. Sophie und Max streiten immer, die kann ich nicht gemeinsam einladen. Wenn ich Sophie nicht einlade, kann ich Anna auch nicht mitnehmen, sonst ist Sophie eifersüchtig.“

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Wen nimmt Amelie mit ins Kino? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien *Spielt*, *Band*, *Laut* und *Musik* Prädikatensymbole und *pop* sowie *rock* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Musik}(x)$ …	x ist eine Musikrichtung	$\mathit{Spielt}(x,y)$ …	x spielt y
$\mathit{Band}(x)$ …	x ist eine Band	pop …	Pop
$\mathit{Laut}(x)$ …	x ist laut	rock …	Rock

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Es gibt laute Bands, die Rock aber nicht Pop spielen.

b) Alle Bands spielen die gleiche laute Musik.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Abba}, \text{AC/DC}, \text{STS}, \text{KISS}, \text{Cure}, \text{Soul}, \text{Jazz}, \text{Pop}, \text{Reggae}, \text{Rock}, \text{Metal}\}\\
I(\mathit{Band}) &= \{\text{Abba}, \text{AC/DC}, \text{STS}\}\\
I(\mathit{Laut}) &= \{\text{AC/DC}, \text{KISS}, \text{Cure}\}\\
I(\mathit{Musik}) &= \{\text{Pop}, \text{Rock}, \text{Metal}, \text{Soul}, \text{Jazz}\}\\
I(\mathit{Spielt}) &= \{(\text{AC/DC}, \text{Rock}), (\text{AC/DC}, \text{Pop}),\quad (\text{STS}, \text{Rock}), (\text{STS}, \text{Jazz}),\\
&\qquad (\text{KISS}, \text{Rock}), (\text{KISS}, \text{Metal}), (\text{KISS}, \text{Jazz}),\\
&\qquad (\text{Cure}, \text{Rock}), (\text{Cure}, \text{Soul})\}\\
I(\mathit{reggae}) &= \text{Reggae}\\
I(\mathit{rock}) &= \text{Rock}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\forall x\,(\mathit{Musik}(x) \supset \exists y\,(\mathit{Band}(y) \wedge \mathit{Spielt}(x, y)))$

d) $\forall x\,(\mathit{Spielt}(x, \mathit{rock}) \wedge \neg\mathit{Spielt}(x, \mathit{reggae}))$

e) $\exists x \exists y\,(\mathit{Band}(x) \wedge \mathit{Laut}(x) \wedge \mathit{Musik}(y) \wedge \mathit{Spielt}(x, y))$

f) $\exists x\,(\mathit{Spielt}(x, \mathit{reggae}) \supset \mathit{Spielt}(x, \mathit{rock}))$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Seien $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1\rangle$ und $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2\rangle$ zwei beliebige deterministische Automaten über demselben Alphabet Σ.

a) Geben Sie eine allgemeine Methode an, um daraus einen Automaten $\mathcal{A}$ für den Durchschnitt der beiden zugehörigen Sprachen zu konstruieren, d.h., es soll $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ gelten.

b) Wenden Sie Ihr Verfahren auf die beiden folgenden Automaten an.

$$\mathcal{A}_1 = \langle \{1, 2, 3\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_1, 1, \{2\}\rangle$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle \{x, y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_2, x, \{y\}\rangle$$

δ_1	a	b
1	2	3
2	2	2
3	3	3

δ_2	a	b
x	y	x
y	y	x

c) Welche Eigenschaft regulärer Sprachen ergibt sich aus der Tatsache, dass immer ein Automat für die Schnittsprache kontruiert werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort.