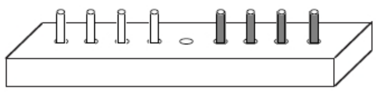
3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 WS 2013/SS 2014 17. September 2014

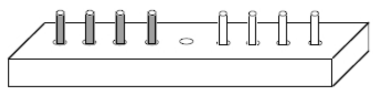
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
			A

Aufgabe 1 (10 Punkte) *Linienhalma* ist ein Knobelspiel, das aus m weißen und n schwarzen Stäben sowie einem Spielbrett mit $m + n + 1$ Löchern besteht, die in einer Linie angeordnet sind. Zu Beginn befinden sich die weißen Stäbe ganz links und die schwarzen Stäbe ganz rechts in den Löchern, sodass das mittlere Loch frei ist (siehe Abb. (a) für $m = n = 4$). Ziel des Spiels ist es, diese Anordnung zu tauschen, sodass sich alle weißen Stäbe rechts und alle schwarzen Stäbe links befinden (Abb. (b)). Es gelten folgende Regeln:

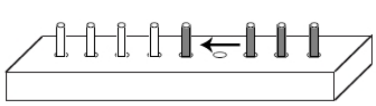
- Schwarze und weiße Stäbe werden abwechselnd gezogen, wobei mit einem schwarzen begonnen wird.
- Ein Zug besteht darin, einen Stab entweder auf ein freies Nachbarfeld (links oder rechts) zu stellen oder über einen linken oder rechten Nachbarstab beliebiger Farbe zu springen, wenn das Feld dahinter frei ist. Die Abbildungen (c) and (d) zeigen die möglichen Anfangszüge für $m = n = 4$.



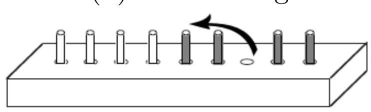
(a) Anfangsstellung



(b) Endstellung



(c) Zug auf ein freies Nachbarfeld



(d) Sprung auf das übernächste Feld

a) Was macht einen Zustand in diesem Spiel aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wie kann man die Zustände kompakt bezeichnen? Wieviele Zustände sind abhängig von der Zahl der schwarzen und weißen Stäbe, m und n, höchstens notwendig?

b) Welche Aktionen führen zu Übergängen in diesem System? Wie kann man sie kompakt bezeichnen?

c) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses Spiel für $m = 1$ und $n = 2$, d.h. für einen weißen und zwei schwarze Stäbe, vollständig beschreibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Boolsche Ausdrücke werden ähnlich den arithmetischen aus Variablen-, Konstanten- und Operatorsymbolen sowie Klammern gebildet. Sei $\mathcal{B}$ die Menge der folgendermaßen definierten boolschen Ausdrücke.

$\mathcal{B}$ ist die kleinste Menge, für die gilt: - $t \in \mathcal{B}$ falls $t \in \mathcal{T}$. - $b\,\texttt{+}\,t \in \mathcal{B}$ falls $b \in \mathcal{B}$ und $t \in \mathcal{T}$.	$\mathcal{T}$ ist die kleinste Menge, für die gilt: - $f \in \mathcal{T}$ falls $f \in \mathcal{F}$. - $t \cdot f \in \mathcal{T}$ falls $t \in \mathcal{T}$ und $f \in \mathcal{F}$.	$\mathcal{F}$ ist die kleinste Menge, für die gilt: - $\{\texttt{a}, \ldots, \texttt{z}\} \subseteq \mathcal{F}$. - $\{\texttt{F}, \texttt{T}\} \subseteq \mathcal{F}$. - $\texttt{-}f \in \mathcal{F}$ falls $f \in \mathcal{F}$. - $\texttt{(}b\texttt{)} \in \mathcal{F}$ falls $b \in \mathcal{B}$.

a) Zeigen Sie, dass $\texttt{T}\cdot\texttt{-((-x)+F)}$ ein boolscher Ausdruck gemäß dieser Definition ist.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $\mathcal{B}$ an.

Zeigen Sie, dass $\texttt{T}\cdot\texttt{-((-x)+F)}$ in der durch Ihre Grammatik definierten Sprache liegt.

c) Definieren Sie die Semantik der Ausdrücke in $\mathcal{B}$ mit Hilfe einer Auswertungsfunktion, die `+` als inklusive Disjunktion, $\cdot$ als Konjunktion, `-` als Negation, `F`/`T` als falsch/wahr sowie `a`, ..., `z` als Variablensymbole interpretiert.

Lässt sich jede aussagenlogische Funktion durch einen Ausdruck in $\mathcal{B}$ darstellen, wenn die Symbole auf diese Art interpretiert werden?

Aufgabe 3 (10 Punkte) Hexe Berta versucht einen neuen Zaubertrank zu kreieren, der ihr ewige Jugend garantieren soll. Sie stellt folgende Überlegungen an:

- Ich brauche auf jeden Fall Flubberwurmschleim, damit der Trank dickflüssig wird.
- Ich sollte auch noch Aalaugen oder Belladonnaessenz dazugeben, aber nur eines davon.
- Wenn ich Belladonnaessenz oder Einhornhaare verwende, dann brauche ich keinen Wolfswurz mehr.
- Ich nehme Aalaugen oder Einhornhaare, vielleicht sogar beide.
- Wenn ich Aalaugen nehme, dann auch Belladonnaessenz und Flubberwurmschleim.

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Welche Zutaten nimmt Hexe Berta für den Zaubertrank? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien *Isst*, *Affe*, *Jung* und *Obst* Prädikatensymbole und *banane* ein Konstantensymbol mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Isst}(x, y)$	... x isst y	$\mathit{Obst}(x)$	... x ist eine Frucht
$\mathit{Affe}(x)$	... x ist ein Affe	banane	... Banane
$\mathit{Jung}(x)$	... x ist jung		

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Es gibt junge Affen, die alle Früchte essen.

b) Alle Affen essen irgendwelche Früchte.

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der angegebenen Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Gibbon}, \text{Gorilla}, \text{Langur}, \text{Makake}, \text{Pavian}, \text{Schimpanse}, \\
&\quad\ \text{Apfel}, \text{Banane}, \text{Kiwi}, \text{Orange}, \text{Weintraube}\} \\
I(\mathit{Affe}) &= \{\text{Gibbon}, \text{Makake}, \text{Schimpanse}\} \\
I(\mathit{Jung}) &= \{\text{Gibbon}, \text{Langur}, \text{Makake}, \text{Pavian}\} \\
I(\mathit{Obst}) &= \{\text{Apfel}, \text{Banane}, \text{Kiwi}, \text{Weintraube}\} \\
I(\mathit{Isst}) &= \{(\text{Makake}, \text{Banane}), (\text{Makake}, \text{Weintraube}), \\
&\quad\ (\text{Gibbon}, \text{Apfel}), (\text{Gibbon}, \text{Banane}), (\text{Gibbon}, \text{Weintraube}), \\
&\quad\ (\text{Pavian}, \text{Banane}), (\text{Pavian}, \text{Kiwi}), (\text{Pavian}, \text{Weintraube}), \\
&\quad\ (\text{Schimpanse}, \text{Banane}), (\text{Schimpanse}, \text{Orange})\} \\
I(\mathit{banane}) &= \text{Banane}
\end{aligned}$$

c) $\forall x\, (\mathit{Obst}(x) \supset \exists y\, (\mathit{Affe}(y) \wedge \mathit{Isst}(x, y)))$

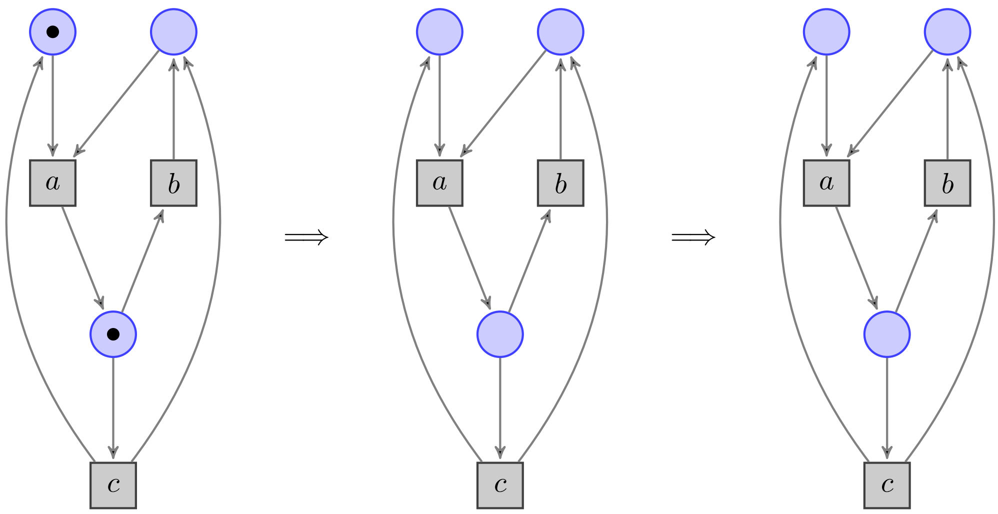
d) $\exists x\, (\mathit{Jung}(x) \wedge \exists y\, (\mathit{Obst}(y) \wedge \mathit{Isst}(x, y)))$

e) $\forall x\, \mathit{Isst}(x, \mathit{banane})$

f) $\exists x\, (\mathit{Affe}(x) \wedge \mathit{Jung}(x) \wedge \mathit{Isst}(x, \mathit{banane}))$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Lassen Sie im folgenden Petrinetz nacheinander zwei Transitionen feuern. Geben Sie für jeden Schritt über dem Pfeil die Transition an, die feuert, sowie im leeren Petrinetz daneben die Markierung danach.



b) Betrachtet man die Namen der Transitionen als Alphabet, so ergeben die möglichen endlichen Transitionsfolgen eine Sprache. Beschreiben Sie das Verhalten des obigen Petrinetzes durch einen endlichen Automaten, der diese Sprache akzeptiert.

c) Beschreiben Sie die durch die endlichen Transitionsfolgen definierte Sprache durch einen regulären Ausdruck.