

**3.0/2.0 VU Formale Modellierung**  
185.A06 SS 2013/WS 2013 18. Februar 2014

Matrikelnummer	Familiename	Vorname	Gruppe <b>A</b>
----------------	-------------	---------	--------------------

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Ein zweistöckiges Haus (Erdgeschoß, 1. und 2. Stock) besitzt einen Aufzug. In jedem Stockwerk gibt es einen Knopf, um den Aufzug zu rufen. In der Aufzugskabine kann das gewünschte Ziel mit einem von drei Knöpfen angegeben werden. Für die Aufzugssteuerung ist es gleichbedeutend, ob im Erdgeschoß der Knopf außen oder in der Kabine der Erdgeschoß-Knopf gedrückt wird; analog für die anderen Knöpfe innen und außen. Die Aufzugssteuerung ist in der Lage sich mehrere Aufträge zu merken. Werden etwa im Erdgeschoß in der Kabine nacheinander die Knöpfe für 2. und 1. Stock (oder umgekehrt) gedrückt, steuert die Kabine zuerst den 1. und dann den 2. Stock an (die Steuerung optimiert die Aufträge). Aufträge, die das Stockwerk betreffen, in dem sich die Kabine bereits befindet, werden ignoriert. Liegt kein Auftrag vor, bleibt die Kabine im zuletzt gewählten Stockwerk. Wird die Anlage eingeschaltet, wartet die Kabine im Erdgeschoß auf den ersten Auftrag.

Zusätzlich zu den drei Signalen, die den Stockwerken entsprechen, verarbeitet die Steuerung noch das Signal „Türe schließt“. Dieses wird automatisch einige Sekunden nach Betätigen der Tasten und Freiwerden der Tür generiert und bewirkt, dass die Türe schließt und die Kabine in das nächstliegende Stockwerk fährt, für das ein Auftrag vorliegt. Gibt es keinen Auftrag, wird das Signal ignoriert. Wird nach „Türe schließt“ noch eine Stockwerkstaste betätigt, beeinflusst das die Zielwahl nicht mehr; die Taste wird so behandelt, als wäre sie nach Ankunft im Zielstockwerk gedrückt worden. Liegen in einem Stockwerk Aufträge für Ziele in entgegengesetzten Richtungen vor, wird zuerst der ältere Auftrag ausgeführt.

*Aufgabe:* Beschreiben Sie das Verhalten der Aufzugssteuerung durch einen endlichen Automaten. Der Automat befindet sich in einem Endzustand, wenn alle Aufträge ausgeführt wurden und der Aufzug auf einen neuen wartet. Ihr Automat soll selber keine Signale generieren sondern nur das Verhalten der Steuerung beschreiben; es ist also kein Transducer gefragt.

Beginnen Sie damit zu definieren, welche Zustände das System einnehmen kann und welche Aktionen zu Übergängen führen.

*Beispiel:* Die Kabine befinde sich im Erdgeschoß. Es werden nacheinander die Tasten „2.Stock“, „Erdgeschoß“ und „1.Stock“ gedrückt (entweder in der Kabine oder außen im jeweiligen Stockwerk), ehe die „Türe schließt“. Der Auftrag „Erdgeschoß“ wird ignoriert, da sich die Kabine bereits dort befindet. Das erste Ziel ist der 1.Stock. Während des Aufenthalts dort (oder auf der Fahrt dorthin) ruft jemand im Erdgeschoß erneut den Aufzug. Die Kabine fährt dennoch zuerst in den 2.Stock, da dies der ältere Auftrag ist und das Erdgeschoß in entgegengesetzter Richtung liegt. Erst danach fährt die Kabine in das Erdgeschoß. Wenn E, 1, 2 und T die jeweiligen Signale bezeichnen, liegt somit das Wort 2E1TETT in der Sprache, die der Automat beschreibt.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Seien folgende Mengen von Variablen-, Funktions- und Prädikatensymbole gegeben.

$$\mathcal{V} = \{x, y, z\}$$

$$\mathcal{F} = \{\textit{latein}/0, \textit{spanisch}/0, \textit{mehr}/1\}$$

$$\mathcal{P} = \{\textit{Schüler}/1, \textit{Wahlfach}/1, \textit{Wählt}/2\}$$

Geben Sie eine strukturierte kontextfreie Grammatik für die Sprache der prädikatenlogischen Formeln über diesen Symbolmengen an. Beispiele für Wörter, die in dieser Formelsprache liegen:

$$\forall x (\textit{Schüler}(x) \supset \exists y (\textit{Wählt}(y) \wedge \textit{Wählt}(x, y)))$$

$$\forall x (\textit{Wählt}(x, \textit{spanisch}) \vee \textit{Wählt}(x, \textit{mehr}(\textit{spanisch})) \vee \textit{Wählt}(x, \textit{mehr}(\textit{mehr}(\textit{spanisch}))))$$

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Der Frühling naht und Tanja möchte in ihrem Garten Blumen pflanzen. Sie stellt die folgenden Überlegungen an.

- Ich will auf jeden Fall Nelken pflanzen.
  - Meiner Mutter zuliebe brauche ich Sonnenblumen oder Veilchen; vielleicht habe ich sogar Platz für beide.
  - Rosen und Veilchen möchte ich jedenfalls nicht gleichzeitig im Garten haben, das sieht nicht hübsch aus.
  - Ich pflanze Nelken nur dann, wenn ich Tulpen gesetzt habe.
  - Wenn ich Rosen pflanze, dann besteht meine Mutter darauf, dass ich auch Tulpen und Veilchen pflanze.
  - Wenn ich Veilchen pflanze, dann auch Sonnenblumen.
- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.
- b) Welche Blumen pflanzt Tanja? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Seien  $\textit{Wählt}/2$ ,  $\textit{Wahlfach}/1$ ,  $\textit{Schüler}/1$  und  $\textit{Schwierig}/1$  Prädikatensymbole sowie  $\textit{latein}$ ,  $\textit{philosophie}$  und  $\textit{spanisch}$  Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\textit{Wählt}(x, y)$	... $x$ wählt $y$	$\textit{latein}$	... Latein
$\textit{Schüler}(x)$	... $x$ ist ein Schüler	$\textit{philosophie}$	... Philosophie
$\textit{Schwierig}(x)$	... $x$ ist schwierig	$\textit{spanisch}$	... Spanisch
$\textit{Wahlfach}(x)$	... $x$ ist ein Wahlfach		

Verwenden Sie diese Symbole, um die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Manche Schüler wählen ein schwieriges Wahlfach aber nicht Latein.
- b) Alle Schüler wählen dasselbe schwierige Wahlfach.

Sei weiters folgende Interpretation  $I$  gegeben:

$$\mathcal{U} = \{\text{Stefan, Max, Susi, Katja, Zeichnen, Deutsch, Latein, Spanisch, Englisch, Philosophie, Turnen}\}$$

$$I(\text{Schüler}) = \{\text{Susi, Max, Stefan}\}$$

$$I(\text{Schwierig}) = \{\text{Turnen, Latein, Spanisch}\}$$

$$I(\text{Wahlfach}) = \{\text{Spanisch, Philosophie, Englisch, Latein, Deutsch, Zeichnen}\}$$

$$I(\text{Wählt}) = \{(\text{Susi, Deutsch}), (\text{Susi, Spanisch}), (\text{Susi, Turnen}), (\text{Max, Philosophie}), (\text{Max, Englisch}), (\text{Max, Latein}), (\text{Max, Spanisch}), (\text{Katja, Spanisch}), (\text{Katja, Zeichnen}), (\text{Katja, Deutsch}), (\text{Stefan, Spanisch}), (\text{Stefan, Latein}), (\text{Stefan, Turnen})\}$$

$$I(\text{spanisch}) = \text{Spanisch}$$

$$I(\text{philosophie}) = \text{Philosophie}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation  $I$  wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

- c)  $\exists x (Wählt(x, \text{spanisch}) \neq Wählt(x, \text{philosophie}))$
- d)  $\forall x (Schüler(x) \supset \exists y (Schwierig(y) \wedge Wählt(x, y)))$
- e)  $\forall x Wählt(x, \text{spanisch})$
- f)  $\forall x (Wahlfach(x) \supset \exists y (Schüler(y) \wedge Wählt(y, x)))$

**Aufgabe 5 (10 Punkte)** SAT-Solver sind Programme, die aussagenlogische Formeln auf Erfüllbarkeit testen. Typische SAT-Solver erhalten als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform und liefern die Antwort „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.

Beispiel: Für die konjunktive Normalform  $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$  liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen  $I_1(A) = I_1(B) = 1$  oder  $I_2(A) = I_2(B) = 0$ .

Angenommen Sie modellieren eine Situation mit Hilfe mehrerer aussagenlogischer Formeln  $F_1, \dots, F_m$  und ihre Kollegin beschreibt dieselbe Situation mit den aussagenlogischen Formeln  $G_1, \dots, G_n$ . (Die Anzahl der Formeln muss nicht gleich sein.) Wie können Sie mit Hilfe eines SAT-Solvers überprüfen, ob die beiden Beschreibungen gleichwertig (semantisch äquivalent) sind? Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte und geben Sie ein Beispiel an, das diese Schritte illustriert. Was bedeutet es, wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung findet?