3.0/2.0 VU Formale Modellierung 185.A06 SS 2013/WS 2013 28. Jänner 2014			
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe **A**

Aufgabe 1 (10 Punkte) Ein Getränkeautomat bietet drei Getränkearten zum Verkauf an: Wasser um 1 €, Cola um 1,50 € und Orangensaft um 2 €. Er akzeptiert 50-Cent-, 1-Euro- und 2-Euro-Münzen; andere Münzen fallen durch. Sobald der eingeworfene Betrag 2 € oder mehr ausmacht, blockiert der Automat den Einwurfschlitz und verhindert damit den Einwurf weiterer Münzen. Der Automat besitzt vier Knöpfe. Der Stornoknopf bewirkt, dass der Automat das bereits eingeworfene Geld zurückgibt und in den Grundzustand zurückkehrt. Die anderen drei Knöpfe sind für die drei Getränkearten. Wird einer dieser Knöpfe gedrückt, ehe ausreichend Geld für das entsprechende Getränk eingeworfen wurde, passiert nichts. Andernfalls wirft der Automat das Getränk aus; Retourgeld wird nicht zurückgegeben.
Modellieren Sie den Getränkeautomaten mit Hilfe eines endlichen Automaten. Die Sprache des endlichen Automaten soll aus genau jenen Aktionsfolgen bestehen, die letztendlich zur Ausgabe eines Getränkes führen. Beginnen Sie die Aufgabe damit, dass Sie sich überlegen, welche Zustände und welche Aktionen diesen Getränkeautomaten kennzeichnen.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Geben Sie eine strukturierte kontextfreie Grammatik in EBNF für die Sprache der prädikatenlogischen Formeln an. Stellen Sie Variablen-, Funktions- und Prädikatensymbole als beliebige, endliche Folgen von Buchstaben und Ziffern dar, wobei Prädikatensymbole mit einem Großbuchstaben, Variablensymbole mit einem der Kleinbuchstaben x, y oder z und Funktionssymbole mit einem der anderen Kleinbuchstaben beginnen sollen. Die Stelligkeit von Prädikaten- und Funktionssymbolen ist nicht vorgegeben, es soll daher möglich sein, jedes dieser Symbole mit einer beliebigen Anzahl von Argumenten (auch ganz ohne Argumente) zu generieren. Beispiele für Formeln, die die Grammatik beschreiben soll: $\forall x\,(\mathit{Mutter}(x) \supset \mathit{SpieltMit}(x, \mathit{tamara}))$, $\mathit{Kennt}(\mathit{anna}, \mathit{vater}(\mathit{max}))$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Fünf Eichhörnchen namens A-, B-, C-, D- und E-Hörnchen bereiten sich auf den Winter vor und verstecken Nüsse in einer Höhle. Als der Winter kommt und sie die Vorräte essen wollen, finden sie nur noch die Schalen der Nüsse. Sofort entbrennt eine hitzige Diskussion.

A-Hörnchen: „E-Hörnchen war bestimmt beteiligt, es hat in letzter Zeit zugenommen!“
E-Hörnchen: „Ja, ich habe von den Nüssen gegessen, aber ich war nicht alleine!“
C-Hörnchen: „A- oder B-Hörnchen waren beteiligt, aber sicher nicht beide!“
A-Hörnchen: „B- oder C-Hörnchen waren nur dann beteiligt, wenn D-Hörnchen nicht dabei war!“
B-Hörnchen: „A- oder C-Hörnchen waren sicher beteiligt, vielleicht sogar beide!“
D-Hörnchen: „Also wenn A-Hörnchen beteiligt war, dann sicher auch B- und E-Hörnchen!“

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Auf wen fällt der Verdacht, wenn alle Aussagen zutreffen? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien $\mathit{SpieltMit}/2$, $\mathit{Mutter}/1$ und $\mathit{Kind}/1$ Prädikatensymbole sowie *anna* und *florian* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\mathit{SpieltMit}(x, y)$	$\ldots$ x spielt mit y	anna	$\ldots$ Anna
$\mathit{Mutter}(x)$	$\ldots$ x ist eine Mutter	$\mathit{florian}$	$\ldots$ Florian
$\mathit{Kind}(x)$	$\ldots$ x ist ein Kind		

Verwenden Sie diese Symbole, um die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Alle Mütter, die mit Anna spielen, spielen auch mit Florian.

b) Manche Kinder spielen mit allen Müttern.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Anna}, \text{Barbara}, \text{Elisabeth}, \text{Florian}, \text{Kathrin}, \text{Nina}, \text{Tamara}\} \\
I(\mathit{Mutter}) &= \{\text{Barbara}, \text{Elisabeth}\} \\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Anna}, \text{Florian}, \text{Nina}\} \\
I(\mathit{SpieltMit}) &= \{(\text{Anna}, \text{Florian}), (\text{Barbara}, \text{Anna}), (\text{Elisabeth}, \text{Anna}), (\text{Elisabeth}, \text{Florian}), \\
&\qquad (\text{Florian}, \text{Nina}), (\text{Florian}, \text{Kathrin}), (\text{Florian}, \text{Anna}), (\text{Nina}, \text{Florian}), \\
&\qquad (\text{Tamara}, \text{Elisabeth}), (\text{Tamara}, \text{Barbara}), (\text{Tamara}, \text{Anna})\}, \\
I(\mathit{anna}) &= \text{Anna} \qquad I(\mathit{florian}) = \text{Florian}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\forall x\, (\mathit{Mutter}(x) \supset \exists y\, (\mathit{Kind}(y) \land \mathit{SpieltMit}(x, y)))$

d) $\forall x\, (\mathit{Mutter}(x) \land \mathit{SpieltMit}(x, \mathit{anna}))$

e) $\exists x\, (\mathit{Kind}(x) \land \forall y\, (\mathit{Kind}(y) \supset \mathit{SpieltMit}(x, y)))$

f) $\forall x\, (\mathit{SpieltMit}(x, \mathit{florian}) \not\equiv \mathit{SpieltMit}(x, \mathit{anna}))$

Aufgabe 5 (10 Punkte) In wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Bereich der formalen Sprachen ist folgende Definition zu finden:

> Eine *pure Grammatik* G ist ein 3-Tupel $\langle \Sigma, P, S \rangle$, wobei Σ ein endliches Alphabet, $S \subseteq \Sigma^*$ eine endliche Menge von Wörtern über Σ und $P \subseteq \Sigma \times \Sigma^*$ eine endliche Menge von Wortpaaren ist. Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt (x, y) wird auch $x \to y$ geschrieben.
>
> Das Wort uyv ist aus dem Wort uxv in einem Schritt ableitbar, geschrieben $uxv \Rightarrow uyv$, wenn P die Produktion $x \to y$ enthält. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist definiert als die Menge $\{\, w \in \Sigma^* \mid s \stackrel{*}{\Rightarrow} w \text{ für ein Wort } s \in S \,\}$, wobei $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Rightarrow$ bezeichnet.[1]

[1]Das heißt, dass $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

a) Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln der Form nach pure Grammatiken sind. Begründen Sie Ihre Antwort, wenn das Tupel keine pure Grammatik darstellt.

   i. $\langle\{\mathtt{S}, \mathtt{A}\}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{SA}\}, \mathtt{S}\rangle$

   ii. $\langle\{\mathtt{S}, \mathtt{A}\}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{SA}\}, \{\mathtt{A}\}\rangle$

   iii. $\langle\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{aSb}, \mathtt{S} \to \varepsilon\}, \{\mathtt{S}\}\rangle$, wobei ε für das Leerwort steht.

   iv. $\langle\{\mathtt{S}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{aSb}, \mathtt{S} \to \varepsilon\}, \{\mathtt{aS}, \mathtt{Sb}\}\rangle$, wobei ε für das Leerwort steht.

b) Sei G die pure Grammatik $\langle\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{a} \to \mathtt{ab}\}, \{\mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}\rangle$. Zeigen Sie, dass das Wort `babb` in der von G generierten Sprache liegt. Wie sehen die Wörter in $\mathcal{L}(G)$ aus? Beschreiben Sie $\mathcal{L}(G)$ mit Hilfe eines regulären Ausdrucks.

c) Beschreiben Sie eine Methode, um zu einer puren Grammatik G eine kontextfreie Grammatik G' zu erhalten, für die $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$ gilt.

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.
- Es gilt $u \overset{*}{\Rightarrow} u$ für alle Wörter $u \in \Sigma^*$.
- Aus $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ und $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\overset{*}{\Rightarrow}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.