

<b>3.0/2.0 VU Formale Modellierung</b> 185.A06      WS 2012      28. Jänner 2013			
Matrikelnummer	Familiename	Vorname	Gruppe <b>A</b>

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** In einem wissenschaftlichen Artikel ist folgende Darstellung zu finden:

Eine Maschine  $\mathcal{M}$  wird beschrieben durch ein 5-Tupel  $\langle P, B, E, A, S \rangle$ , wobei  $P$  eine endliche Menge von Positionen ist,  $B \subseteq P$  und  $E \subseteq P$  die Beginn- bzw. Endpositionen bezeichnen und  $A$  eine endliche Menge von Aktionen ist. Die Steuerungsfunktion  $S: P \times P \mapsto 2^A$  gibt zu jedem Paar von Positionen all jene Aktionen an, mit denen die Maschine von der ersten Position in die zweite gelangen kann.

Die erweiterte Steuerungsrelation  $\hat{S} \subseteq P \times P \times A^+$  ist die kleinste Menge, für die gilt:

- $(p, p, a)$  liegt in  $\hat{S}$ , falls  $a \in S(p, p)$  gilt.
- Wenn  $(p_1, p_2, u)$  und  $(p_2, p_3, v)$  in  $\hat{S}$  liegen, dann liegt auch  $(p_1, p_3, uv)$  darin.

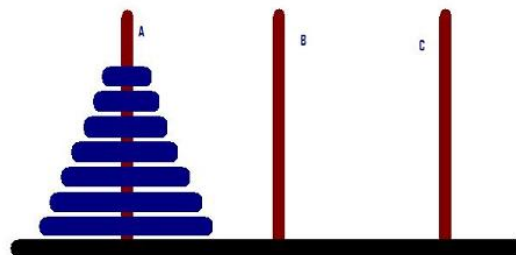
Eine Aktionsfolge  $w \in A^+$  ist für die Maschine  $\mathcal{M}$  zulässig, wenn es eine Beginnposition  $b \in B$  und eine Endposition  $e \in E$  gibt, sodass  $(b, e, w)$  in  $\hat{S}$  liegt.

- Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Maschine mit 3 Positionen und 2 Aktionen an, die zwei Beginn- und zwei Endpositionen besitzt. Beschreiben Sie die für Ihre Maschine zulässigen Aktionsfolgen.
- Beschreiben Sie, wie sich Maschinen als endliche Automaten darstellen lassen, wenn man die Menge der zulässigen Aktionsfolgen als die Sprache des Automaten betrachtet.
- Geben Sie einen endlichen Automaten an, der Ihrer Maschine aus der ersten Teilaufgabe entspricht.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Die *Türme von Hanoi* sind ein Rätsel, das aus drei senkrechten Stäben ( $A, B, C$ ) und  $n$  gelochten, unterschiedlich großen Scheiben besteht. Zu Beginn befinden sich alle Scheiben nach Größe sortiert auf Stab  $A$ , mit der größten zuunterst. Ziel des Spieles ist es, den gesamten Turm zu Stab  $C$  zu verschieben.

Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- In jedem Zug wird die oberste Scheibe von einem der Stäbe entfernt und bei einem der anderen Stäbe zuoberst abgelegt.
- Es dürfen nur kleinere auf größere Scheiben gelegt werden.



- a) Was macht einen Zustand in diesem System aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wieviele verschiedene Zustände gibt es bei  $n$  Scheiben? Wie kann man die Zustände eindeutig aber kompakt bezeichnen?
- b) Was sind die Übergänge in diesem System? Welche und wieviele gibt es? Wie kann man sie eindeutig aber kompakt bezeichnen?
- c) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses System für  $n = 2$  vollständig beschreibt.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Die Zeichenroboter eines gewissen Herstellers können durch Programme folgender Gestalt gesteuert werden.

Jedes Programm beginnt mit dem Schlüsselwort `action`, dann folgt der Programmname und eine Anweisungsfolge; beendet wird es mit dem Schlüsselwort `end`. Eine Anweisungsfolge besteht aus einer nicht-leeren Folge von Anweisungen, die jeweils durch einen Punkt voneinander getrennt werden. Eine Anweisung kann eine Dreh-, Bewegungs- oder Hebeanweisung sein. Eine Drehanweisung besteht aus dem Schlüsselwort `turn` gefolgt von einer Winkelangabe; dazwischen kann optional die Richtungsangabe `left` bzw. `right` verwendet werden. Eine Bewegungsanweisung besteht aus dem Schlüsselwort `forward` bzw. `backward` gefolgt von einer Entfernungsangabe. Eine Hebeanweisung besteht nur aus dem Schlüsselwort `up` oder `down`.

Ein Programmname ist eine nicht-leere Folge von Ziffern, Klein- und Großbuchstaben, die mit einem Großbuchstaben beginnt. Winkel- und Entfernungsangaben sind Dezimalnumerae, die optional mit einem Minuszeichen beginnen können. (Ein Dezimalnumeral ist eine nicht-leere Folge von Dezimalziffern.)

Beispiel eines solchen Programms:

```
action Bzu5f
  up.
  forward 70.
  turn -8.
  down.
  turn right 65
end
```

Spezifizieren Sie die zulässigen Programme mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie so weit wie möglich EBNF-Notationen und strukturieren Sie Ihre Grammatik, um sie übersichtlich zu halten.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Max hat Einladungen für seine Geburtstagsparty verschickt und erhält folgende Rückmeldungen:

- Daniel kommt auf jeden Fall.
- Mindestens einer der Zwillinge Albert und Conny kommt.
- Entweder kommen Emil oder Albert, aber nicht beide.
- Wenn Daniel kommt, dann kommt auch Boris.
- Wenn Emil kommt, kommen auch Boris und Albert.
- Wenn Albert kommt, nimmt er auch Conny mit.

- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.
- b) Wer kommt zur Party? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

**Aufgabe 5 (10 Punkte)** Seien *Besitzt*/2, *Zauberer*/1, *Magisch*/1 und *Waffe*/1 Prädikaten-symbole sowie *schwert* und *stab* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

<i>Zauberer</i> ( $x$ ) ... $x$ ist ein Zauberer	<i>Besitzt</i> ( $x, y$ ) ... $x$ besitzt $y$
<i>Magisch</i> ( $x$ ) ... $x$ ist magisch	<i>schwert</i> ... Schwert
<i>Waffe</i> ( $x$ ) ... $x$ ist eine Waffe	<i>stab</i> ... Zauberstab

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Alle Zauberer besitzen entweder ein Schwert oder einen Zauberstab (aber nicht beides).
- b) Manche Zauberer besitzen alle magischen Waffen.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\text{Draco, Harry, Hermine, Ron, Zauberstab, Drache, Kessel, Teppich,} \\ &\quad \text{Schwert, Pistole, Zaubertrank}\} \\ I(\text{Zauberer}) &= \{\text{Harry, Hermine, Ron}\} \\ I(\text{Magisch}) &= \{\text{Zauberstab, Drache, Kessel, Teppich}\} \\ I(\text{Waffe}) &= \{\text{Zauberstab, Drache, Schwert, Pistole, Zaubertrank}\} \\ I(\text{Besitzt}) &= \{(\text{Harry, Drache}), (\text{Harry, Schwert}), (\text{Harry, Zauberstab}), \\ &\quad (\text{Harry, Kessel}), (\text{Harry, Teppich}), \\ &\quad (\text{Draco, Zaubertrank}), (\text{Draco, Drache}), \\ &\quad (\text{Hermine, Drache}), (\text{Hermine, Zauberstab}), (\text{Hermine, Schwert}), \\ &\quad (\text{Ron, Kessel}), (\text{Ron, Drache}), (\text{Ron, Zauberstab})\} \\ I(\text{schwert}) &= \text{Schwert} \\ I(\text{trank}) &= \text{Zaubertrank} \\ I(\text{stab}) &= \text{Zauberstab} \\ I(\text{drache}) &= \text{Drache} \end{aligned}$$

Geben Sie an, ob die nachfolgenden Formeln in dieser Interpretation wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem konkreten Beispiel; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

- c)  $\exists x \forall y (\text{Zauberer}(x) \wedge (\text{Magisch}(y) \supset \text{Besitzt}(x, y)))$
- d)  $\exists x (\text{Zauberer}(x) \wedge \text{Besitzt}(x, \text{drache}) \wedge \neg \text{Besitzt}(x, \text{schwert}))$
- e)  $\forall x (\text{Besitzt}(x, \text{trank}) \neq \text{Besitzt}(x, \text{stab}))$
- f)  $\forall x (\text{Besitzt}(x, \text{stab}) \vee \text{Besitzt}(x, \text{drache}))$