3.0 VU Formale Modellierung

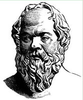
Gernot Salzer

Arbeitsbereich Theoretische Informatik und Logik
Institut für Computersprachen

SS 2016

Inhalt

Sokrates aus Sicht der Aussagenlogik



Alle Menschen sind sterblich.	A	
Sokrates ist ein Mensch.	B	
Sokrates ist sterblich.	C	

$$\frac{A, B \not\models C}{1\;\;1\;\;\;\;0}$$

Clipart courtesy FCIT

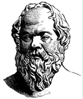
- Die Prämissen und die Konklusion sind für die Aussagenlogik atomar.
- Können nur durch (drei unabhängige) Variablen modelliert werden.
- Keine korrekte Inferenz!
- Keine Berücksichtigung der inneren Struktur der Aussagen: „alle Menschen“, „ist sterblich“, „ist Mensch“, ...

Aussagenlogik zu ausdrucksschwach für eine adäquate Modellierung!

Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um

- Quantoren: für alle ($\forall$), es gibt ($\exists$)
- Prädikatensymbole: $Mensch(x)$ ... „x ist ein Mensch“
- Funktionsterme: $Mensch(mutter(sokrates))$ ... „Sokrates Mutter ist ein Mensch“

Sokrates aus Sicht der Prädikatenlogik



Alle Menschen sind sterblich.	$\forall x\ (Mensch(x) \supset Sterblich(x))$
Sokrates ist ein Mensch.	$Mensch(sokrates)$
Sokrates ist sterblich.	$Sterblich(sokrates)$

Clipart courtesy FCIT

Warum ist das eine korrekte Inferenz?

$\forall x\ P(x) \models P(t)$ (Instanziierungsregel)

Wenn P für alle x gilt, dann gilt P für jedes spezielle Objekt t.

$\forall x(Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \models Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates)$

$A,\ A \supset B \models B$ (Modus ponens)

Wenn A gilt und wenn B aus A folgt, dann gilt auch B.

$Mensch(sokrates),\ Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates) \models Sterblich(sokrates)$

$$\dfrac{Mensch(sokrates) \qquad \dfrac{\forall x(Mensch(x) \supset Sterblich(x))}{Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates)}}{Sterblich(sokrates)}$$

Funktions-, Prädikaten- und Variablensymbole

$\mathcal{F}$ ... Menge der Funktionssymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)
$f/n \in \mathcal{F}$ ... f ist ein n-stelliges Funktionssymbol.
(f benötigt n Argumente.)
$f/0$ ... nullstelliges Funktionssymbol, Konstantensymbol

$\mathcal{P}$ ... Menge der Prädikatensymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)
$P/n \in \mathcal{P}$ ... P ist ein n-stelliges Prädikatensymbol.
(P benötigt n Argumente.)
$P/0$ ... nullstelliges Prädikatensymbol, entspricht Aussagenvariable

$\mathcal{V} = \{x, y, z, x_0, x_1, \dots\}$ ... Individuenvariablensymbole

$\mathit{Mensch}(\mathit{mutter}(\mathit{sokrates})), \quad \mathit{Sterblich}(x)$

Funktionssymbole: $\mathit{mutter}/1$, $\mathit{sokrates}/0$
Prädikatensymbole: $\mathit{Mensch}/1$, $\mathit{Sterblich}/1$
Variablensymbol: x

Inhalt

Terme

- ... bestehen aus Variablen- und Funktionssymbolen.
- ... ermöglichen die Bildung von Ausdrücken wie $3 \cdot \sin(x+2)$.
- ... sind eine allgemeine Repräsentationsform für hierarchische Strukturen.

Terme über $\mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$

Die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, kurz $\mathcal{T}$, der Terme über $\mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(t1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ — Individuenvariablen sind Terme.

(t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$. — Konstantensymbole sind Terme.

(t3) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.
Funktionssymbole mit der passenden Zahl an Termargumenten sind Terme.

Notation:

- Pre-/Postfixnotation für manche unären ($n = 1$) Funktionssymbole
- Infixnotation für manche binären ($n = 2$) Funktionssymbole
- Klammerneinsparungen durch Prioritäten

Verschiedene Terme

$3 \cdot \sin(x+2)$ bzw. $\cdot(3, \sin(+(x,2)))$

$s(s(s(0)))$ Darstellung der Zahl $3 = 1 + (1 + (1 + 0))$

$f(a, f(b, f(c, nil)))$ Darstellung der Liste $[a, b, c]$

$g(f(a), g(a, (f(x))))$ ist ein Term, falls $a/0, f/1, g/2 \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathcal{V}$.

$$\dfrac{g/2 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{f/1 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{a/0 \in \mathcal{F}}{a \in \mathcal{T}}\ \text{t2}}{f(a) \in \mathcal{T}}\ \text{t3} \qquad \dfrac{g/2 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{a/0 \in \mathcal{F}}{a \in \mathcal{T}}\ \text{t2} \qquad \dfrac{f/1 \in \mathcal{F} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\ \text{t1}}{f(x) \in \mathcal{T}}\ \text{t3}}{g(a, (f(x))) \in \mathcal{T}}\ \text{t3}}{g(f(a), g(a, (f(x)))) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, VS)}\ \text{t3}$$

Die Menge der Terme, $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, ist die kleinste Menge, sodass:

(t1) $v \in \mathcal{T}$, falls $v \in \mathcal{V}$.

(t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$.

(t3) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.

Aussagenlogische Formeln sind Terme.

Sei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \ldots\}$ und $\mathcal{F} = \{\top/0, \bot/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \ldots\}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ die Menge der aussagenlogischen Formeln (unter Verwendung der Infixnotation für binäre Operatoren).

$(A \wedge B) \supset C$ entspricht $\supset(\wedge(A, B), C)$.

$A \wedge (B \supset C)$ entspricht $\wedge(A, \supset(B, C))$.

Reguläre Ausdrücke über dem Alphabet Σ sind Terme.

Sei $\mathcal{V} = \{\}$ und $\mathcal{F} = \{\varepsilon/0, \emptyset/0, +/2, \cdot/2, {}^*/1\} \cup \{\, s/0 \mid s \in \Sigma \,\}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ die Menge der regulären Ausdrücke über Σ.

($+$ und $\cdot$ werden infix notiert, $\cdot$ wird nicht angeschrieben, und $*$ ist ein Postfixoperator).

So ziemlich alles lässt sich als Term auffassen ...

Semantik von Termen

Variablensymbole: Wert abhängig von momentaner Wertebelegung

Konstanten- und Funktionssymbole:

- Vordefinierte Symbole: feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Termsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation als Konstante bzw. Funktionen

Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich $\mathcal{U}$ ordnet jedem Funktionssymbol aus $\mathcal{F}$ eine Funktion wie folgt zu:

$$
\begin{aligned}
I(f) &\in \mathcal{U} && \text{für } f/0 \in \mathcal{F} \\
I(f)&\colon \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U} && \text{für } f/n \in \mathcal{F},\ n > 0
\end{aligned}
$$

Arithmetische Ausdrücke (wie etwa `(x+1)*(x+1+1)`)

$\mathcal{F} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{-}, \mathtt{*}\}$

$\mathcal{U} = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ $\qquad I(\mathtt{+}) = +$ (Addition)

$I(\mathtt{0}) = 0$ $\qquad I(\mathtt{-}) = -$ (Subtraktion)

$I(\mathtt{1}) = 1$ $\qquad I(\mathtt{*}) = \cdot$ (Multiplikation)

Aussagenlogik

$\mathcal{F} = \{\top/0, \bot/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \dots\}$

$\mathcal{U} = \mathbb{B} = \{0, 1\}$ $\qquad I(\top) = 1 \qquad I(\neg) = \text{not} \qquad \dots$

$I(\bot) = 0 \qquad I(\wedge) = \text{and}$

Reguläre Ausdrücke

$\mathcal{F} = \{\varepsilon/0, \emptyset/0, +/2, \cdot/2, {}^*/1\} \cup \{\, s/0 \mid s \in \Sigma \,\}$

$\mathcal{U} = 2^{\Sigma^*}$ $\qquad I(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \qquad I(+) = \cup$

$I(\emptyset) = \{\} \qquad I(\cdot) = \cdot$

$I(s) = \{s\} \qquad I({}^*) = {}^*$

$\sigma : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ ... Wertebelegung für die Variablensymbole

Semantik von Termen

Der Wert eines Terms in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathsf{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(v) = \sigma(v)$ für $v \in \mathcal{V}$;

(v2) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(f) = I(f)$ für $f/0 \in \mathcal{F}$;

(v3) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = I(f)(\mathsf{val}_{I,\sigma}(t_1), \dots, \mathsf{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $f/n \in \mathcal{F}$, $n > 0$.

Wert von `(x+1)*(x+1+1)` für $\sigma(x) = 0$

Arithmetik: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, $I_1(\mathtt{1}) = 1$, $I_1(\mathtt{+}) = +$, $I_1(\mathtt{*}) = \cdot$

$\mathsf{val}_{I_1,\sigma}(\mathtt{(x+1)*(x+1+1)}) = (0+1) \cdot (0+1+1) = 2$

Aussagenlogik: $\mathcal{U} = \mathbb{B}$, $I_2(\mathtt{1}) = 1$, $I_2(\mathtt{+}) = \text{or}$, $I_2(\mathtt{*}) = \text{and}$

$\mathsf{val}_{I_2,\sigma}(\mathtt{(x+1)*(x+1+1)}) = \text{and}\ (\text{or}\ (0,1), \text{or}\ (0, \text{or}\ (1,1))) = 1$

Inhalt

Prädikatenlogik – Syntax

$\mathcal{V}$ ... Individuenvariablensymbole
$\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ ... Funktions- bzw. Prädikatensymbole mit Stelligkeiten
$(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ... „Signatur“

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Die Menge $\mathcal{PF}$ der prädikatenlogischen Formeln über der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(p1) $P \in \mathcal{PF}$, wenn $P/0 \in \mathcal{P}$;

(p2) $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{PF}$, wenn $P/n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$;

(p3) $\top, \bot \in \mathcal{PF}$;

(p4) $\neg F \in \mathcal{PF}$, wenn $F \in \mathcal{PF}$;

(p5) $(F * G) \in \mathcal{PF}$, wenn $F, G \in \mathcal{PF}$ und $* \in \{\land, \uparrow, \lor, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

(p6) $\forall x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

(p7) $\exists x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

P, $P(t_1, \ldots, t_n)$ ... „Atomformeln“

$\forall x\ (Mensch(x) \supset Sterblich(x))$ ist eine Formel

$Mensch/1$ und $Sterblich/1$ sind Prädikatensymbole.

$$\dfrac{x \in \mathcal{V} \qquad \dfrac{\dfrac{Mensch/1 \in \mathcal{P} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\,t1}{Mensch(x) \in \mathcal{PF}}\,p2 \qquad \dfrac{Sterblich/1 \in \mathcal{P} \qquad \dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}}\,t1}{Sterblich(x) \in \mathcal{PF}}\,p2}{(Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}}\,p5}{\forall x\ (Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}}\,p6$$

Inhalt

Prädikatenlogik – Semantik

Prädikatensymbole: repräsentieren Relationen bzw. Elementaraussagen

- Vordefinierte Symbole wie $\top$ und $\bot$: feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Formelsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation durch Relationen bzw. Wahrheitswerte

(Prädikatenlogische) Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich $\mathcal{U}$ ordnet jedem Symbol der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Funktion bzw. Relation wie folgt zu:

$$
\begin{array}{ll}
I(f) \in \mathcal{U} & \text{für } f/0 \in \mathcal{F} \\
I(f) \colon \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U} & \text{für } f/n \in \mathcal{F},\ n > 0 \\
\\
I(P) \in \{0,1\} & \text{für } P/0 \in \mathcal{P} \\
I(P) \subseteq \mathcal{U}^n & \text{für } P/n \in \mathcal{P},\ n > 0 \\
I(P) \colon \mathcal{U}^n \mapsto \{0,1\} & \text{(alternative Sichtweise)}
\end{array}
$$

Nullstellige Prädikatensymbole = Aussagenvariablen

Zwei Interpretationsmöglichkeiten für $P/0 \in \mathcal{P}$: $I(P) = 0$ oder $I(P) = 1$.

Einstellige Prädikatensymbole = Typen, Klassen

Sei $\mathit{Mann}/1, \mathit{Frau}/1 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \{\text{Andrea}, \text{Anna}, \text{Hans}, \text{Maria}, \text{Tom}\}$.

$I(\mathit{Mann})$ und $I(\mathit{Frau})$ als Mengen:

$$I(\mathit{Mann}) = \{\text{Andrea}, \text{Hans}, \text{Tom}\}$$
$$I(\mathit{Frau}) = \{\text{Andrea}, \text{Anna}, \text{Maria}\}$$

... oder als Funktionen:

x	$I(\mathit{Mann})(x)$	$I(\mathit{Frau})(x)$
Andrea	1	1
Anna	0	1
Hans	1	0
Maria	0	1
Tom	1	0

Mehrstellige Prädikatensymbole = Relationen, Beziehungen

Sei $</2 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(<)$ als Menge:

$$I(<) = \{\, (m,n) \mid m < n \,\} = \{(0,1),\, (0,2),\, (1,2),\, (0,3),\, (1,3), \ldots\}$$

... oder als Funktion:

$$I(<)(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $Plus/3 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(Plus)$ als Menge:

$$\begin{aligned} I(Plus) &= \{\, (k,l,m) \mid k + l = m \,\} \\ &= \{(0,0,0),\, (1,0,1),\, (0,1,1),\, (2,0,2)\, (1,1,2)\, (0,2,2), \ldots\} \end{aligned}$$

... oder als Funktion:

$$I(Plus)(k,l,m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k + l = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Der Wert einer Formel in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathrm{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(P) = I(P)$ für $P/0 \in \mathcal{P}$;

(v2) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $P/n \in \mathcal{P}$;

(v3) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\top) = 1$ und $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\bot) = 0$;

(v4) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\neg F) = \mathrm{not}\,\mathrm{val}_{I,\sigma}(F)$;

(v5) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,(F * G)\,) = \mathrm{val}_{I,\sigma}(F) \circledast \mathrm{val}_{I,\sigma}(G)$,
wobei $\circledast$ die logische Funktion zum Operator $*$ ist;

(v6) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,\forall x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(v7) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(\,\exists x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für mind. ein } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\sigma \overset{x}{\sim} \sigma'$ ... $\sigma(v) = \sigma'(v)$ für alle $v \in \mathcal{V}$ mit $v \neq x$

(σ und σ' sind identisch, nur $\sigma(x)$ und $\sigma'(x)$ können verschieden sein.)

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist wahr

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n - 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))) = 1$$

$$\iff \mathrm{val}_{I,\sigma'}(\exists y\, P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma''}(x), \mathrm{val}_{I,\sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \sigma''(x) = \sigma''(y) - 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

Wir wählen jene Variablenbelegung σ'', für die $\sigma''(y) = \sigma''(x) + 1$ gilt:

$$\sigma''(x) = (\sigma''(x) + 1) - 1 \quad \text{für alle } \sigma''(x) = \sigma'(x) \in \mathbb{N}$$

Gilt, daher ist $\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ wahr in dieser Interpretation.

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist falsch

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n + 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_{I,\sigma}(\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))) = 1 \\
\iff\ &\mathrm{val}_{I,\sigma'}(\exists y\, P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ &\mathrm{val}_{I,\sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ &I(P)(\mathrm{val}_{I,\sigma''}(x), \mathrm{val}_{I,\sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\
\iff\ &\sigma''(x) = \sigma''(y) + 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma
\end{aligned}$$

Problem: Für $\sigma''(x) = \sigma'(x) = 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung in $\mathbb{N}$:

$$\sigma''(x) \neq \sigma''(y) + 1 \quad \text{für alle } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$$

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist daher falsch in dieser Interpretation.

Beispiel: Sport

$$\mathcal{P} = \{\mathit{Mensch}/1, \mathit{Sportart}/1, \mathit{Anstrengend}/1, \mathit{Betreibt}/2\}$$
$$\mathcal{F} = \{\mathit{handball}/0, \mathit{laufen}/0\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Maria, Martina, Max, Moritz, Basketball, Fussball, Handball,}\\
&\quad \text{Schach, Singen, Slackline, Turnen, Laufen}\}\\
I(\mathit{Mensch}) &= \{\text{Martina, Max, Moritz}\}\\
I(\mathit{Sportart}) &= \{\text{Basketball, Fussball, Schach, Turnen}\}\\
I(\mathit{Anstrengend}) &= \{\text{Laufen, Basketball, Handball, Singen}\}\\
I(\mathit{Betreibt}) &= \{(\text{Maria, Handball}), (\text{Maria, Singen}), (\text{Maria, Fussball}),\\
&\quad (\text{Martina, Laufen}), (\text{Martina, Slackline}), (\text{Martina, Basketball}),\\
&\quad (\text{Max, Schach}), (\text{Max, Laufen}), (\text{Max, Turnen}),\\
&\quad (\text{Moritz, Laufen}), (\text{Moritz, Handball})\}\\
I(\mathit{handball}) &= \text{Handball}\\
I(\mathit{laufen}) &= \text{Laufen}
\end{aligned}$$

$\exists x\,(\mathit{Betreibt}(x, \mathit{handball}) \subset \mathit{Betreibt}(x, \mathit{laufen}))$

Wahr, da (Moritz, Handball) $\in I(\mathit{Betreibt})$

Beispiel: Sport

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\mathit{Mensch}/1, \mathit{Sportart}/1, \mathit{Anstrengend}/1, \mathit{Betreibt}/2\} \\
\mathcal{F} &= \{\mathit{handball}/0, \mathit{laufen}/0\} \\[1em]
\mathcal{U} &= \{\text{Maria, Martina, Max, Moritz, Basketball, Fussball, Handball,} \\
&\quad\ \text{Schach, Singen, Slackline, Turnen, Laufen}\} \\
I(\mathit{Mensch}) &= \{\text{Martina, Max, Moritz}\} \\
I(\mathit{Sportart}) &= \{\text{Basketball, Fussball, Schach, Turnen}\} \\
I(\mathit{Anstrengend}) &= \{\text{Laufen, Basketball, Handball, Singen}\} \\
I(\mathit{Betreibt}) &= \{(\text{Maria, Handball}), (\text{Maria, Singen}), (\text{Maria, Fussball}), \\
&\quad\ (\text{Martina, Laufen}), (\text{Martina, Slackline}), (\text{Martina, Basketball}), \\
&\quad\ (\text{Max, Schach}), (\text{Max, Laufen}), (\text{Max, Turnen}), \\
&\quad\ (\text{Moritz, Laufen}), (\text{Moritz, Handball})\} \\
I(\mathit{handball}) &= \text{Handball} \\
I(\mathit{laufen}) &= \text{Laufen}
\end{aligned}
$$

$\forall x\, \neg(\mathit{Betreibt}(x, \mathit{handball}) \equiv \mathit{Betreibt}(x, \mathit{laufen}))$

Falsch,
da $(\text{Laufen}, \text{Laufen}) \notin I(\mathit{Betreibt})$ und $(\text{Laufen}, \text{Handball}) \notin I(\mathit{Betreibt})$

Beispiel: Sport

$$\mathcal{P} = \{Mensch/1, Sportart/1, Anstrengend/1, Betreibt/2\}$$
$$\mathcal{F} = \{handball/0, laufen/0\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Maria, Martina, Max, Moritz, Basketball, Fussball, Handball,}\\
&\quad \text{Schach, Singen, Slackline, Turnen, Laufen}\}\\
I(Mensch) &= \{\text{Martina, Max, Moritz}\}\\
I(Sportart) &= \{\text{Basketball, Fussball, Schach, Turnen}\}\\
I(Anstrengend) &= \{\text{Laufen, Basketball, Handball, Singen}\}\\
I(Betreibt) &= \{(\text{Maria, Handball}), (\text{Maria, Singen}), (\text{Maria, Fussball}),\\
&\quad (\text{Martina, Laufen}), (\text{Martina, Slackline}), (\text{Martina, Basketball}),\\
&\quad (\text{Max, Schach}), (\text{Max, Laufen}), (\text{Max, Turnen}),\\
&\quad (\text{Moritz, Laufen}), (\text{Moritz, Handball})\}\\
I(handball) &= \text{Handball}\\
I(laufen) &= \text{Laufen}
\end{aligned}$$

$\exists x\ (Sportart(x) \land \forall y\ (Mensch(y) \supset \neg Betreibt(y, x)))$

Wahr, da etwa Fussball von keinem Menschen (Maria ist kein Mensch) betrieben wird

Beispiel: Sport

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\mathit{Mensch}/1, \mathit{Sportart}/1, \mathit{Anstrengend}/1, \mathit{Betreibt}/2\} \\
\mathcal{F} &= \{\mathit{handball}/0, \mathit{laufen}/0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Maria, Martina, Max, Moritz, Basketball, Fussball, Handball,} \\
&\quad\ \text{Schach, Singen, Slackline, Turnen, Laufen}\} \\
I(\mathit{Mensch}) &= \{\text{Martina, Max, Moritz}\} \\
I(\mathit{Sportart}) &= \{\text{Basketball, Fussball, Schach, Turnen}\} \\
I(\mathit{Anstrengend}) &= \{\text{Laufen, Basketball, Handball, Singen}\} \\
I(\mathit{Betreibt}) &= \{\text{(Maria, Handball), (Maria, Singen), (Maria, Fussball),} \\
&\quad\ \text{(Martina, Laufen), (Martina, Slackline), (Martina, Basketball),} \\
&\quad\ \text{(Max, Schach), (Max, Laufen), (Max, Turnen),} \\
&\quad\ \text{(Moritz, Laufen), (Moritz, Handball)}\} \\
I(\mathit{handball}) &= \text{Handball} \\
I(\mathit{laufen}) &= \text{Laufen}
\end{aligned}
$$

$\forall x\ (\mathit{Anstrengend}(x) \supset \exists y\ (\mathit{Mensch}(y) \wedge \mathit{Betreibt}(y, x)))$

Falsch: Singen ist anstrengend, wird aber nur von Maria betrieben, die kein Mensch ist.

Eine Formel F heißt

- erfüllbar, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man Modell von F);
- widerlegbar, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man Gegenbeispiel oder Gegenmodell zu F);
- unerfüllbar, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für alle I und alle σ;
- (allgemein)gültig, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und alle σ (F nennt man in diesem Fall auch Tautologie).

F ist meist eine geschlossene Formel: alle Variablen sind durch Quantoren gebunden. Dann ist die Variablenbelegung irrelevant für den Formelstatus.

$\forall x\, \exists y\, P(x, s(y))$ ist eine geschlossene Formel.

$\exists y\, P(x, s(y))$ ist eine offene Formel: x ist durch keinen Quantor gebunden.

$P(x) \wedge \exists x\, P(x)$ ist offen: erstes Vorkommen von x ist ungebunden (frei).

Gültige Formeln

- Jede gültige Formel der Aussagenlogik liefert gültige $\mathcal{PF}$-Formeln, wenn Aussagenvariablen durch $\mathcal{PF}$-Formeln ersetzt werden, etwa:
  $A \vee \neg A$
  $P(x) \vee \neg P(x)$
  $\exists x\, P(x) \vee \neg \exists x\, P(x)$
- $\forall x\, P(x) \supset \exists x\, P(x)$
- $\forall x \forall y\, P(x, y) \supset \forall y \forall x\, P(x, y)$

Unerfüllbare Formeln

- Jede unerfüllbare Formel der Aussagenlogik liefert unerfüllbare $\mathcal{PF}$-Formeln, wenn Aussagenvariablen durch $\mathcal{PF}$-Formeln ersetzt werden, etwa:
  $A \wedge \neg A$
  $P(x) \wedge \neg P(x)$
  $\exists x\, P(x) \wedge \neg \exists x\, P(x)$
- $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, \neg P(x)$

Formeln, die sowohl erfüll- als auch widerlegbar sind

- $P(x) \supset P(y)$
- $\exists x\, P(x) \supset \forall x\, P(x)$
- $\exists x\, P(x) \supset \forall x\, \neg P(x)$
- $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$
- $\forall x\, \forall y\, (P(x, y) \supset P(y, x))$

Äquivalenz, Konsequenz und Gültigkeit

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen äquivalent, geschrieben $F = G$, wenn $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = \mathrm{val}_{I,\sigma}(G)$ für alle I und alle σ gilt.

$F_1, \ldots, F_n \models_{I,\sigma} G$:
„Aus $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F_1) = \cdots = \mathrm{val}_{I,\sigma}(F_n) = 1$ folgt $\mathrm{val}_{I,\sigma}(G) = 1$."

Logische Konsequenz

$F_1, \ldots, F_n \models G$: $F_1, \ldots, F_n \models_{I,\sigma} G$ gilt für alle I und σ.

Die Formeln F und G sind äquivalent ($F = G$) genau dann, wenn $F \equiv G$ eine gültige Formel ist.

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \supset G$ gültig.

Wichtige Äquivalenzen

Neben den aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch noch folgende:

$\neg\forall x\, F = \exists x\, \neg F$	Dualität von $\forall$ und $\exists$
$\neg\exists x\, F = \forall x\, \neg F$	
$\forall x\, F[x] = \forall y\, F[y]$	Umbenennung gebundener Variablen
$\exists x\, F[x] = \exists y\, F[y]$	(sofern y nicht bereits in F vorkommt)
$\forall x\, \forall y\, F = \forall y\, \forall x\, F$	Vertauschung gleichartiger Quantoren
$\exists x\, \exists y\, F = \exists y\, \exists x\, F$	
$\forall x\, (F \wedge G) = \forall x\, F \wedge \forall x\, G$	Distributivität $\forall/\wedge$
$\exists x\, (F \vee G) = \exists x\, F \vee \exists x\, G$	Distributivität $\exists/\vee$

Falls x nicht frei in F vorkommt, gilt außerdem:

$\forall x\, F = F \qquad \exists x\, F = F$

$\forall x\, (F \vee G) = F \vee \forall x\, G$	Distributivität $\forall/\vee$
$\exists x\, (F \wedge G) = F \wedge \exists x\, G$	Distributivität $\exists/\wedge$

Das Lügner-Paradoxon

Ich behaupte: „Ich lüge!“ – Sage ich die Wahrheit?

Wenn ich die Wahrheit sage, ist “Ich lüge“ richtig,
d.h., ich sage nicht die Wahrheit. – Widerspruch!

Wenn ich nicht die Wahrheit sage, ist „Ich lüge“ falsch,
d.h., ich sage die Wahrheit. – Widerspruch!

Das Kreter-Halbparadoxon

Der Kreter Epimenides behauptet: „Alle Kreter lügen!“.
Sagt Epimenides die Wahrheit?

Wenn ja, lügen alle Kreter, also auch er. – Widerspruch!

Wenn nein, ist es falsch, dass alle Kreter lügen.
Trugschluss: „Alle Kreter sagen die Wahrheit!“ (Also auch Epimenides?)
Richtig: Es gibt mindestens einen aufrichtigen Kreter. Kein Widerspruch.

Falsch: $\neg\forall = \forall\neg$ Richtig: $\neg\forall = \exists\neg$

Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik

Gültigkeitsproblem

Gegeben: prädikatenlogische Formel F
Frage: Ist F gültig, d.h., gilt $\mathrm{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und σ?

Viele praktische Aufgaben lassen sich als Probleme der Prädikatenlogik formulieren, wie z.B.

- Verifikation von Software
- Wissensrepräsentation

Die meisten prädikatenlogischen Fragen lassen sich als Gültigkeitsproblem formulieren.

Problem: Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Das bedeutet:

- Ist die Formel gültig, lässt sich mit verschiedenen Methoden ein Beweis finden (kann allerdings beliebig lange dauern).
- Ist die Formel nicht gültig, lässt sich das mit keiner Methode zuverlässig feststellen. Beweiser terminieren in diesem Fall oft nicht.

Inhalt

Wahl der Prädikatenstelligkeit

Max liest Zeitung.

Nullstelliges Prädikat (Aussagenvariable):

$Max\_liest\_Zeitung$

Einstelliges Prädikat:

$Liest\_Zeitung(max)$

Zweistelliges Prädikat:

$Liest(max, zeitung)$

Die beste Wahl hängt von den Umständen ab.

Wähle ein eigenes Symbol für Satzteile, die öfter auftreten (können).

Zeit-, Eigenschafts- und Hauptwörter

Sokrates ist sterblich.

Möglichkeit 1: Hauptwort wird zum Prädikat.

$Sokrates\_ist(sterblich)$

Möglichkeit 2: Zeit-/Eigenschaftswort wird zum Prädikat.

$Ist\_sterblich(sokrates)$

Die zweite Möglichkeit ist fast immer die richtige.

Mache Zeitwörter bzw. Eigenschaften zu Prädikatensymbole und Hauptwörter zu ihren Argumenten.

Fürwörter (Pronomen)

Persönliche Fürwörter (ich, du, er, sie, es, ...) oder bezügliche Fürwörter (der, welcher, ...) vermeiden Wiederholungen und stellen Bezüge her.

Mia liebt Max, der wiederum sie liebt.

Umformung in

Mia liebt Max und Max liebt Mia.

ergibt die Formel

$$Liebt(mia, max) \wedge Liebt(max, mia)$$

Ersetze Fürwörter durch Namen. Wiederhole Satzteile, die durch Fürwörter ersetzt wurden.

Unbestimmte Fürwörter wie „nichts“ ziehen Subjekt/Objekt und Negation zusammen.

Nichts währt ewig.

Trenne Verneinung und Subjekt:

Es existiert nicht etwas, das ewig währt.

Ergibt die Formel

$\neg\exists x\, \mathit{Währt\_ewig}(x)$

Ich kann nichts sehen.
$\neg\exists x\, \mathit{Kann\_sehen}(\mathit{gernot}, x)$

Führe Variablen für unbestimmte Fürwörter ein.
Mache Negationen explizit.

Fürwörter und Bindewörter

Vor mir ist etwas Großes, und es ist hungrig.

Die zwei Teilsätze können nicht getrennt behandet werden: „es“ bezieht sich auf „etwas Großes“. Die entsprechende Variable muss überall dieselbe sein.

Es gibt etwas, das vor mir ist, das groß ist, und das hungrig ist.
$\exists x\,(\mathit{Befindet\_sich\_vor(x,gernot)} \wedge \mathit{Groß}(x) \wedge \mathit{Hungrig}(x))$

Erstrecken sich die Bezüge von Fürwörtern über Bindewörter hinweg, behandle die Fürwörter vor den Bindewörtern.

Quantoren, Typen und Beziehungen

Jeder Student ist jünger als irgendein Professor.

Identifiziere Objekt-/Personenarten und stelle sie durch einstellige Typprädikate dar.

„ist Student“ $\Rightarrow$ $\mathit{Stud}(\ldots)$
„ist Professor“ $\Rightarrow$ $\mathit{Prof}(\ldots)$

Max ist Student. $\Rightarrow$ $\mathit{Stud}(\mathit{max})$
Gernot ist Professor. $\Rightarrow$ $\mathit{Prof}(\mathit{gernot})$
Jemand ist Student. $\Rightarrow$ $\mathit{Stud}(x)$

Identifiziere Beziehungen (Relationen) und formalisiere sie durch mehrstellige Prädikatensymbole.

„ist jünger als“ $\Rightarrow$ $\mathit{Jünger}(\ldots,\ldots)$

Max ist jünger als Gernot. $\Rightarrow$ $\mathit{Jünger}(\mathit{max}, \mathit{gernot})$

Quantoren, Typen und Beziehungen

Jeder Student ist jünger als irgendein Professor.

Verwende $\forall$-Quantoren für „alle“/„jede“ und $\exists$-Quantoren für „es gibt“/„jemand“/„irgendein“.

$\forall x\,(\mathit{Stud}(x) \supset \exists y\,(\mathit{Prof}(y) \wedge \mathit{Jünger}(x, y)))$

Für alle Individuen x gilt:
Falls x ein Student ist, gibt es mindestens ein Individuum y,
sodass y Professor ist und x jünger als y ist.

Funktionssymbole

Jedes Kind ist jünger als seine Mutter.

„x ist ein Kind“ $\Rightarrow$ $\mathit{Kind}(x)$
„y ist Mutter von x“ $\Rightarrow$ $\mathit{Mutter}(y, x)$

$\forall x\, \forall y((\mathit{Kind}(x) \wedge \mathit{Mutter}(y, x)) \supset \mathit{Jünger}(x, y))$

Diese Formalisierung berücksichtigt nicht, dass jedes Kind genau eine genetische Mutter hat.

Besser: Fasse „Mutter“ als Funktion auf, die jedem Kind seine eindeutig bestimmte Mutter zuordnet.

„Mutter von x“ $\Rightarrow$ $\mathit{mutter}(x)$

$\forall x\, (\mathit{Kind}(x) \supset \mathit{Jünger}(x, \mathit{mutter}(x)))$

Alternierende Quantoren

Vergleichen Sie:

$\forall x\, \exists y\, Mutter(y, x)$ „Jeder hat eine Mutter."	$\exists y\, \forall x\, Mutter(y, x)$ „Jemand ist die Mutter von allen."
y hängt vom gewählten x ab.	y ist unabhängig vom gewählten x.

Vertauschung unterschiedlicher Quantoren ändert die Bedeutung!

Quantoren und Eigenschaften

Alle vernünftigen Leute verabscheuen Gewalt.

$\forall$ vernünftige x (x verabscheut Gewalt) (Zwischenschritt, ist keine Formel!)

$\forall x\,(\mathit{Vernünftig}(x) \supset \mathit{Verabscheut}(x, \mathit{gewalt}))$

Eigenschaften $\forall$-quantifizierter Variablen werden zu Prämissen einer Implikation.

Manche vernünftige Leute verabscheuen Gewalt.
Es gibt vernünftige Leute, die Gewalt verabscheuen.

$\exists$ vernünftige x (x verabscheut Gewalt) (Zwischenschritt, ist keine Formel!)

$\exists x\,(\mathit{Vernünftig}(x) \wedge \mathit{Verabscheut}(x, \mathit{gewalt}))$

Eigenschaften $\exists$-quantifizierter Variablen werden zu Teilen einer Konjunktion.

Beispiel: Sport

$\mathcal{P} = \{\mathit{Mensch}/1, \mathit{Sportart}/1, \mathit{Anstrengend}/1, \mathit{Betreibt}/2\}$
$\mathcal{F} = \{\mathit{handball}/0, \mathit{laufen}/0\}$

Alle Menschen betreiben eine anstrengende Sportart.

Zu jedem Menschen x gibt es eine Sportart,
die anstrengend ist und von x betrieben wird.

Zu jedem Menschen x gibt es eine Sportart y,
sodass y anstrengend ist und x y betreibt.

„Zu jedem Menschen x …“	$\forall x(\mathit{Mensch}(x) \supset \cdots)$
„Es gibt eine Sportart y …“	$\exists y(\mathit{Sportart}(y) \wedge \cdots)$
„y ist anstrengend und x betreibt y“	$\mathit{Anstrengend}(y) \wedge \mathit{Betreibt}(x, y)$

$\forall x(\mathit{Mensch}(x) \supset \exists y(\mathit{Sportart}(y) \wedge \mathit{Anstrengend}(y) \wedge \mathit{Betreibt}(x, y)))$
$\forall x \exists y(\mathit{Mensch}(x) \supset (\mathit{Sportart}(y) \wedge \mathit{Anstrengend}(y) \wedge \mathit{Betreibt}(x, y)))$

Beispiel: Sport

$\mathcal{P} = \{Mensch/1, Sportart/1, Anstrengend/1, Betreibt/2\}$
$\mathcal{F} = \{handball/0, laufen/0\}$

Es gibt anstrengende Menschen, die Handball und Laufen betreiben.

Es gibt (mindestens) einen Menschen x,
der anstrengend ist, Handball betreibt und Laufen betreibt.

Es gibt (mindestens) einen Menschen x,
sodass x anstrengend ist, x Handball betreibt und x Laufen betreibt.

„Es gibt einen Menschen x“	$\exists x(Mensch(x) \land \cdots)$
„x ist anstrengend“	$Anstrengend(x)$
„x betreibt Handball“	$Betreibt(x, handball)$
„x betreibt Laufen“	$Betreibt(x, laufen)$

$$\exists x(Mensch(x) \land Anstrengend(x) \land Betreibt(x, handball) \land Betreibt(x, laufen))$$

Fooling people

„You can fool some of the people all of the time,
and all of the people some of the time,
but you cannot fool all of the people all of the time."

(zugeschrieben Abraham Lincoln, 16. Präsident der USA, 1809–1865)

$FoolAt(x, y)$	... you can fool x at time y
$Person(x)$	... x is a person / x is one of the people
$PointInTime(y)$	... y is a point in time

$$\begin{array}{ll} & \exists x(Person(x) \wedge \forall y(PointInTime(y) \supset FoolAt(x, y))) \\ \wedge & \forall x(Person(x) \supset \exists y(PointInTime(y) \wedge FoolAt(x, y))) \\ \wedge & \neg\forall x(Person(x) \supset \forall y(PointInTime(y) \supset FoolAt(x, y))) \end{array}$$