3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer

Arbeitsbereich Theoretische Informatik und Logik
Institut für Computersprachen

SS 2016

Inhalt

Was ist Logik?

Neulich in der U-Bahn

„Stell dir vor, die Julia hat mit dem Mike Schluss gemacht!“
„Logisch, er hat ja was mit der Laura angefangen.“

Was daran ist logisch?

Es ist nicht logisch,

- dass Mike mit Laura anbandelt
- oder dass man bei Untreue Schluss machen muss
- oder dass sich Julia von Mike trennt.

Diese Aussagen können zutreffen oder auch nicht, sie sind aber nicht „logisch“.

Falls man aber akzeptiert,

- dass Mike untreu war
- und dass Untreue zur Trennung führt

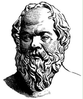
dann ist es logisch schlüssig,

- dass sich Julia von Mike trennt.

Mike ist Julia untreu.	x
Wenn Untreue, dann Trennung.	Wenn x, dann y.
Julia trennt sich von Mike.	y

Die Logik untersucht allgemeine Prinzipien korrekten Schließens.

Schlussfolgerungen (Inferenzen)

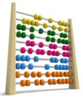


Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
} Prämissen, Annahmen

Sokrates ist sterblich. Konklusion, Folgerung

Clipart courtesy FCIT

- Die Prämissen sind durch „und“ verbunden.
- Die Linie bedeutet „daher“.
- Wahre Prämissen, wahre Konklusion.
- Gültige Inferenz: Die Konklusion folgt logisch aus den Prämissen.



Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
4 ist eine gerade Zahl.

---

4 ist durch 2 teilbar.

- wahre Prämissen, wahre Konklusion
- gültige Inferenz
- Inferenzmuster identisch mit vorigem Beispiel

Alle US-Präsidenten sind in der USA geboren.
Schwarzenegger ist US-Präsident.

Schwarzenegger ist in der USA geboren.

- eine wahre und eine falsche Prämisse
- falsche Konklusion
- trotzdem korrekte Inferenz!

Zugrundeliegende Inferenzregel

Alle x sind y.	x ... Mensch, US-Präsident, gerade Zahl
z ist ein x.	y ... sterblich, in USA geboren, durch 2 teilbar
z ist y.	z ... Sokrates, Schwarzenegger, 4

- x, y, z: Platzhalter (Variablen) für Eigenschaften, Individuen, ...
- Die Logik befasst sich mit den Inferenzregeln.
- Das Anwendungsgebiet bestimmt den Wertebereich der Variablen und die Wahrheit der elementaren Aussagen.

Gültigkeit von Inferenzregeln

Unzulässige Inferenzen

Alle Menschen sind sterblich.	Sokrates ist ein Mensch.
Sokrates ist sterblich.	Sokrates ist sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.	Alle Menschen sind sterblich.

- wahre Prämissen
- wahre Konklusionen
- aber trotzdem keine zulässigen Inferenzen!

Kriterium für die Gültigkeit von Inferenzregeln

Immer wenn alle Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr.

Äquivalentes Kriterium (Umkehrung)

Immer wenn die Konklusion falsch ist, ist mindestens eine Prämisse falsch.

Alle Menschen sind sterblich.			Alle x sind y.
Sokrates ist sterblich.		Inferenzregel:	z ist y.
Sokrates ist ein Mensch.			z ist ein x.

- Diese Regel erfüllt nicht das Kriterium.
- Gegenbeispiel: $x =$ Ball, $y =$ rund, $z =$ Sonne

Alle Fußbälle sind rund.	wahr
Die Sonne ist rund.	wahr
Die Sonne ist ein Fußball.	falsch

- Die Inferenzregel ist daher nicht gültig,
  obwohl sie gelegentlich zu wahren Konklusionen führt.
  Aber eben nicht immer!

Logische Junktoren (Operatoren, Konnektive, Funktionen)

… ermöglichen die Bildung zusammengesetzter Aussagen,
so wie Addition und Subtraktion bei arithmetischen Ausdrücken.

Wenn Feiertag ist oder der Professor krank ist,
findet die Vorlesung nicht statt.

- „es ist Feiertag" (x), „Prof ist krank" (y), „VO findet statt" (z)
  … elementare Aussagen aus dem Uni-Milieu
- Logische Struktur: „Wenn x oder y, dann nicht z"
- Junktoren: wenn-dann, oder, nicht

Weitere Junktoren in …

- der Aussagenlogik: und, entweder-oder, genau dann-wenn, …
- Zeitlogiken: morgen, gestern, im nächsten Moment, bis, …
- Modallogiken: notwendigerweise, möglicherweise, …
- …

Quantoren

. . . ermöglichen Aussagen über die Anzahl betroffener Individuen, Zeitpunkte etc.

Jeder Mann liebt eine Frau.

- Wertebereiche: Männer (x) , Frauen (y)
- Logische Struktur:
  „Für alle x gibt es mindestens ein y, sodass x y liebt."
- Quantoren: für alle, mindestens ein

Weitere Quantoren: einige, viele, mindestens fünf, höchstens drei, immer, manchmal, irgendwann später, . . .

Komponenten einer Logik

- logische Symbole, Variablen:
  notwendig für kompakte und unmissverständliche Schreibung
- Syntax: Regeln für Wohlgeformtheit
  Wann ist eine Folge logischer Symbole eine Formel?
- Semantik: Bedeutung von Formeln
  Welche Wahrheitswerte gibt es?
  Wann ist eine Formel wahr, wann falsch?
  Was bedeuten die Symbole?
- Konsequenzrelation:
  Wann folgt eine Formel logisch aus anderen Formeln?
- Inferenzregeln (logischer Kalkül)
  Wie lassen sich Formeln beweisen?

Unterscheidung von Logiken

... nach Wahrheitswerten:

- Zweiwertige Logik: wahr/falsch
- Mehrwertige Logiken: wahr/falsch/unbekannt/widersprüchlich, ...
- Fuzzy logic: [0,1] (alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1)

... nach Quantoren:

- Aussagenlogik: keine Quantoren
- Quantifizierte Aussagenlogik: Quantoren über Aussagenvariablen
- Prädikatenlogik: Quantoren über Individuenvariablen
- Logiken höherer Stufen: Quantoren über Funktionen und Prädikate

... nach den Ausdrucksmöglichkeiten:

- Elementare Logik: und, oder, nicht, für alle, ...
- Zeitlogiken: im nächsten Moment, für immer, irgendwann später, ...
- Modallogiken: „ich glaube/weiß, dass“, „es ist möglich/notwendig, dass“, ...

... nach wahren/beweisbaren Formeln, nach Kalkülen, ...

Klassische Aussagenlogik (Propositionallogik)

- zwei Wahrheitswerte: wahr/falsch, true/false, verum/falsum, 1/0, ein/aus, . . .
- Aussagenvariablen, die wahr oder falsch sein können
- elementare Operatoren wie „und“, „oder“, „nicht“, . . .
- keine Quantoren

Geht zurück auf die Antike

Grundlegend für

- Philosophie
- Mathematik
- Informatik

Clipart courtesy FCIT

Aristoteles

384–322 v.Chr.

Inhalt

Negation

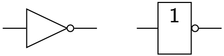
Ich gehe nicht ins Kino.

Ist falsch, wenn ich ins Kino gehe, und wahr andernfalls.

x	not x
1	0
0	1

Andere Bezeichnung: non

Symbole: $\neg x$, $-x$, $\sim x$, x', $!x$, $\overline{x}$, $\mathrm{N}x$, $\ldots$

Logikgatter: 

Konjunktion

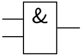
Der Himmel ist blau und die Sonne scheint.

Trifft nur zu, wenn jede der beiden Teilaussagen wahr ist.

x	y	x and y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Andere Bezeichnung: et

Symbole: $x \wedge y$, $x \cdot y$, xy, $x \& y$, Kxy, ...

Logikgatter:  

Disjunktion, Alternative

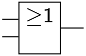
Ich trinke zum Essen Wein oder Bier (oder auch beides).

Nur falsch, wenn ich weder Wein noch Bier trinke.

x	y	x or y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Andere Bezeichnung: vel

Symbole: $x \vee y$, $x + y$, $x \mid y$, Axy

Logikgatter:  

Ausschließende Disjunktion (Antivalenz)

Ich bin entweder gut drauf oder saugrantig,
etwas anderes gibt es bei mir nicht.

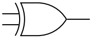
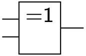
Trifft zu, wenn ich in genau einer der Stimmungslagen bin (die sich ausschließen).

x	y	x xor y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Andere Formulierungen: x oder y

Andere Bezeichnungen: exor, aut

Symbole: $x \not\equiv y$, $x \oplus y$, $x \not\Leftrightarrow y$, $x \not\leftrightarrow y$, Jxy, ...

Logikgatter:  

Äquivalenz

Ich springe dann (und nur dann), wenn du es auch tust.

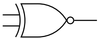
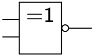
Trifft zu, wenn beide springen oder keiner.

x	y	x iff y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Andere Formulierungen: x genau dann wenn y, x if and only if y, x ist notwendig und hinreichend für y, x ist äquivalent zu y

Andere Bezeichnungen: eq, äq, xnor, nxor, ...

Symbole: $x \equiv y$, $x \Leftrightarrow y$, $x \leftrightarrow y$, Exy, ...

Logikgatter:  

Implikation

Wenn/Falls ich ins Kino gehe, (dann) esse ich dort Popcorn.
Ich gehe nur dann ins Kino, wenn ich dort Popcorn esse.

Falsch, wenn ich im Kino kein Popcorn esse, und wahr, wenn doch.
Keine Festlegung betreffend Popcorn außerhalb des Kinos, daher wahr.

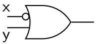
x	y	x implies y
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

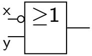
„Verum ex quolibet“: x implies $1 = 1$
„Ex falso quodlibet“: 0 implies $y = 1$

Andere Formulierungen: aus x folgt y, x impliziert y, x hinreichend für y

Andere Bezeichnung: seq (sequi)

Symbole: $x \supset y$, $x \Rightarrow y$, $x \to y$, Cxy, ...

Logikgatter: 



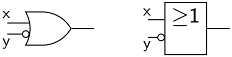
Implikation (Umkehrung)

Ich esse (dann) Popcorn, wenn/falls ich ins Kino gehe.

x	y	x if y
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Andere Formulierungen: x folgt aus y, x wird von y impliziert, x ist notwendig für y

Symbole: $x \subset y$, $x \Leftarrow y$, $x \leftarrow y$, ...

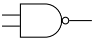
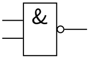
Logikgatter: 

Negierte Konjunktion

x	y	x and y	x nand y
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Andere Bezeichnungen:
Sheffer-Strich, nd (J.Nicod)

Symbole: $x \uparrow y$, $x \mid y$, x/y, Dxy, ...

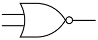
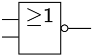
Logikgatter:  

Negierte Disjunktion

x	y	x or y	x nor y
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Andere Bezeichnungen:
Peirce-Pfeil, sh (H.M.Sheffer)

Symbole: $x \downarrow y$, Xxy, ...

Logikgatter:  

Wenn Feiertag ist oder der Professor krank ist,
findet die Vorlesung nicht statt.

Logische Struktur: „Wenn x oder y, dann nicht z."

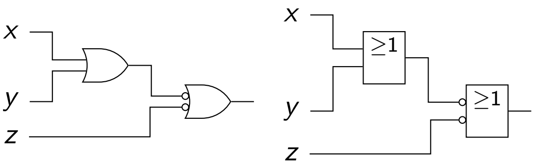
Logische Funktion: (x or y) implies not z implies (or (x, y), not(z))

Logische Formel: $(x \vee y) \supset \neg z$

Prefix-Notation: C A x y N z

Algebraische Notation: $(x + y) \rightarrow -z$ $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{z}$

Logischer Schaltkreis:



Implikation oder Äquivalenz?

Natürlichsprachliche Implikationen sind oft logische Äquivalenzen.

Wenn du mein Auto wäscht, bekommst du 10 Euro.

Und was, wenn ich es nicht tue?
Nur ein Logiker hält in diesem Fall 10 Euro für möglich.
Alle anderen interpretieren den Satz als:

Du bekommst 10 Euro dann und nur dann, wenn du das Auto wäscht.

Der positive Erfolg bei allen Lehrveranstaltungen und Prüfungen der Studieneingangs- und Orientierungsphase berechtigt zur Absolvierung der weiteren Lehrveranstaltungen und Prüfungen sowie zum Verfassen der im Curriculum vorgesehenen Bachelor- oder Diplomarbeiten.

Universitätsgesetz 2002, Stand Bgbl I Nr. 13/2011, § 66(1a)

Logiker: Keine Einschränkung bei nicht bestandener STEOP.
Ministerium: Restliches Studium dann und nur dann, wenn STEOP.

Der Besitz eines Führerscheins berechtigt zum Lenken eines Autos.

Ohne Führerschein keine Berechtigung? (Äquivalenz)
Auch nicht auf Privatgelände? (Doch nur Implikation?)

In formalen Kontexten wird strikt zwischen Implikation und Äquivalenz unterschieden. „Implikation = halbe Äquivalenz“

Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, ist sie gerade.

4-Teilbarkeit ist eine hinreichende Bedingung für Geradheit,
aber keine notwendige.

Äquivalenz führt zu einer falschen Aussage:

Eine Zahl ist durch 4 teilbar genau dann, wenn sie gerade ist.

2 ist eine gerade Zahl, aber nicht durch 4 teilbar.

Inklusive oder exklusive Disjunktion?

Natürlichsprachliche Disjunktionen sind meist ausschließend gemeint.

Falls du mich suchst: Ich bin zu Hause oder in der Arbeit.

Physikalisch kann ein Körper nicht an zwei Orten gleichzeitig sein.
Andererseits: Das Büro kann Teil der Wohnung sein.

„Tee oder Kaffee?“ – „Beides, bitte!“

Eher unüblich, aber der Gast ist König.

Ich besuche dich morgen oder übermorgen.

Ein Besuch an beiden Tagen wäre unerwartet.

Ich fahre entweder Auto oder höre Musik.
(Auf beides gleichzeitig kann ich mich nicht konzentrieren.)

Wirklich ein Beispiel für ausschließende Disjunktion?

Habe ich außerhalb des Autos tatsächlich keine ruhige Minute?

Die exklusive Disjunktion ist hier als Implikation gemeint (und wird auch so verstanden):

Wenn ich Auto fahre, höre ich nicht Musik.

Legt nicht fest, was ich außerhalb des Autos mache.

Rezept für Zweifelsfälle der aussagenlogischen Modellierung

1. Identifiziere die elementaren Aussagen.
2. Analysiere alle Wahrheitsbelegungen.
3. Wähle geeignete logische Funktionen (unbeirrt von Intuition und natürlicher Sprache).

$z =$ Entweder „ich fahre Auto“ (x) oder „ich höre Musik“ (y).

x	y	z	x or y	x xor y	x implies not y	x nand y
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1

x implies not y: Wenn ich Auto fahre, dann höre ich nicht Musik.

x nand y: Es kommt nicht vor, dass ich Auto fahre und Musik höre.

Aussagenlogische Funktionen – Überblick

true	false
1	0
$\top$	$\bot$

x	not
1	0
0	1
	$\neg$

x	y	and	nand	or	nor	iff	xor	implies		if	
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
		$\wedge$	$\uparrow$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\not\equiv$	$\supset$	$\not\supset$	$\subset$	$\not\subset$

2 nullstellige Funktionen (= Konstanten): true, false
4 einstellige Funktionen: not, ...
16 zweistellige Funktionen: and, nand, or, ...

Es gibt 2^{2^n} verschiedene n-stellige logische (Boolesche) Funktionen.

- 2^n verschiedene Argumentkombinationen („Zeilen“)
- 2 Ergebnismöglichkeiten für jede Argumentkombination

Funktionale Vollständigkeit

Eine Menge von Funktionen heißt vollständig (für eine Funktionsklasse), wenn damit alle Funktionen (der Klasse) ausgedrückt werden können.

$\{\text{not}, \text{and}, \text{or}\}$ ist funktional vollständig.

Begründung siehe später.

$\{\text{not}, \text{and}\}$ ist funktional vollständig.

- $\{\text{not}, \text{and}, \text{or}\}$ ist vollständig (siehe oben).
- or kann durch $\{\text{not}, \text{and}\}$ ausgedrückt werden kann:
  $x \text{ or } y = \text{not}(\text{not}\, x \text{ and not}\, y)$

x	y	not x	not y	not x and not y	not(not x and not y)
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

$\{\text{nand}\}$ ist funktional vollständig.

- $\{\text{not}, \text{and}\}$ ist funktional vollständig (siehe oben).
- $\text{not}\, x = x \text{ nand } x$
- $x \text{ and } y = \text{not}(x \text{ nand } y) = (x \text{ nand } y) \text{ nand } (x \text{ nand } y)$

Praktisch relevant: nand ist einfach als Halbleiter-Schaltkreis realisierbar. Somit ist jede logische Funktion als Schaltkreis realisierbar.

Die Mengen $\{\text{nor}\}$, $\{\text{not}, \text{or}\}$, $\{\text{not}, \text{implies}\}$ und $\{\text{implies}, \text{false}\}$ sind ebenfalls funktional vollständig.

Inhalt

Syntax versus Semantik

Syntax:

- Zeichenfolge, mit der etwas notiert wird
- Regeln dafür, welche Zeichenfolgen zulässig sind

Semantik:

- Bedeutung einer Zeichenfolge
- Funktion, die jeder zulässigen Zeichenfolge eine Bedeutung zuordnet

Syntax und Semantik sind grundsätzlich voneinander unabhängig.
Die Bedeutung von Zeichen muss explizit vereinbart werden.

Syntax	Semantik
eins (deutsch) one (englisch) 1 (mathematisch)	das abstrakte Konzept der Zahl „1“
	Ort in Oberösterreich (deutsch) körperliche Betätigung (englisch)

and, nand ... mathematische Funktionen

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ and } y \\ (x \text{ nand } y) \text{ nand } (x \text{ nand } y) \end{array}\right\} \text{ ... ununterscheidbar, identische Funktion:}$$

x	y	x and y	$(x$ nand $y)$ nand $(x$ nand $y)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Für Aussagen über die Form der Ausdrücke brauchen wir eine Formelsprache.

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y \\ (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y) \end{array}\right\} \text{ ... unterschiedliche Zeichenketten mit } \begin{array}{c} 3 \\ 11 \end{array} \text{ Symbolen}$$

Induktive Definition unendlicher Mengen

Stufenweise Konstruktion der geraden Zahlen:

- 0 ist eine gerade Zahl: $G_0 = \{0\}$
- Addiert man zu geraden Zahlen 2, erhält man wieder gerade Zahlen:
  $$\begin{aligned} G_1 &= G_0 \cup \{\, n+2 \mid n \in G_0 \,\} = \{0,2\} \\ G_2 &= G_1 \cup \{\, n+2 \mid n \in G_1 \,\} = \{0,2,4\} \\ G_{i+1} &= G_i \cup \{\, n+2 \mid n \in G_i \,\} \ = \{0,2,4,\ldots,2(i+1)\} \end{aligned}$$
- Die geraden Zahlen sind alle so konstruierten Zahlen:
  $\mathbb{G} = \lim_{i\to\infty} G_i = \bigcup_{i\geq 0} G_i$

Umständlich, aber konstruktiv: Beginnend mit G_0 lassen sich systematisch alle geraden Zahlen berechnen.

Beobachtung:

- $G_0 \subseteq \mathbb{G}$
- Wenn $n \in \mathbb{G}$, dann auch $n+2 \in \mathbb{G}$.
- $\mathbb{G}$ ist die kleinste Menge mit diesen beiden Eigenschaften.

Induktive Definition der geraden Zahlen

$\mathbb{G}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- $0 \in \mathbb{G}$
- Wenn $n \in \mathbb{G}$, dann auch $n + 2 \in \mathbb{G}$.

Kompakte Definition, aber nicht konstruktiv:
In den Bedingungen kommt die zu definierende Menge $\mathbb{G}$ selbst vor.

Beiden Methoden definieren dieselbe Menge.
(Nicht offensichtlich, Beweis erforderlich!).

Daher: „Use the best of both worlds.“

- Definiere die Menge induktiv.
- Konstruiere benötigte Elemente stufenweise.

Anmerkung: Der Zusatz „ist kleinste Menge“ ist wesentlich.
Die natürlichen Zahlen erfüllen ebenfalls beide Bedingungen, sind aber nicht die kleinste derartige Menge.

Induktive Definition – allgemeine Situation

$\mathcal{U}$ ... Universum, Menge aller relevanten Elemente
$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{U}$ ... Menge von Grundelementen
$f_1 : \mathcal{U}^{n_1} \mapsto \mathcal{U}$, $f_2 : \mathcal{U}^{n_2} \mapsto \mathcal{U}$, ... Konstruktionsfunktionen

Stufenweise Konstruktion der Menge $\mathcal{M}$

- $$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i+1} = \mathcal{M}_i &\cup \{\, f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) \mid x_1, \ldots, x_{n_1} \in \mathcal{M}_i \,\} \\ &\cup \{\, f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}) \mid x_1, \ldots, x_{n_2} \in \mathcal{M}_i \,\} \\ &\cup \cdots \end{aligned}$$
- $\mathcal{M} = \lim_{i \to \infty} \mathcal{M}_i = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{M}_i$

Induktive Definition der Menge $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$
- Wenn $x_1, \ldots, x_{n_1} \in \mathcal{M}$, dann $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \mathcal{M}$.
- Wenn $x_1, \ldots, x_{n_2} \in \mathcal{M}$, dann $f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}) \in \mathcal{M}$.
- ...

Beispiel: Geschachtelte Klammern

Gesucht: Spezifikation aller richtig geschachtelten Folgen von runden, eckigen und geschwungenen Klammern, wie etwa `([[{()}]])`

Induktive Definition:

Die Menge $\mathcal{K}$ der Klammernfolgen ist die kleinste Menge, für die gilt:

(k1) $(), [], \{\} \in \mathcal{K}$ alternativ: $\{(), [], \{\}\} \subseteq \mathcal{K}$

(k2) Wenn $x \in \mathcal{K}$, dann auch $(x) \in \mathcal{K}$.

(k3) Wenn $x \in \mathcal{K}$, dann auch $[x] \in \mathcal{K}$.

(k4) Wenn $x \in \mathcal{K}$, dann auch $\{x\} \in \mathcal{K}$.

Wir zeigen, dass `([[{()}]])` in der Menge $\mathcal{K}$ liegt.

1. $() \in \mathcal{K}$ — wegen (k1)
2. Da $() \in \mathcal{K}$, gilt auch $\{()\} \in \mathcal{K}$. — wegen (k4)
3. Da $\{()\} \in \mathcal{K}$, gilt auch $[\{()\}] \in \mathcal{K}$. — wegen (k3)
4. Da $[\{()\}] \in \mathcal{K}$, gilt auch $[[\{()\}]] \in \mathcal{K}$. — wegen (k3)
5. Da $[[\{()\}]] \in \mathcal{K}$, gilt auch $([[\{()\}]]) \in \mathcal{K}$. — wegen (k2)

Aussagenlogik – Syntax

Ausdrücke wie x and y und (x nand y) nand (x nand y) sind ununterscheidbar (gleiche Funktion!). Um Aussagen über ihre Form treffen zu können, benötigen wir eine Formelsprache.

$\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots, A_0, A_1, \dots\}$ aussagenlogische Variablen

Syntax aussagenlogischer Formeln

Die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln ist die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ Variablen sind Formeln.

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$ $\top$ und $\bot$ sind Formeln.

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$. $\neg F$ ist eine Formel, falls F eine ist.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.
$(F * G)$ ist eine Formel, falls F und G welche sind und $*$ ein binäres Op.symbol ist.

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$ ist eine aussagenlogische Formel, weil:

1. A und B sind Formeln. (a1)
2. $(A \uparrow B)$ ist eine Formel, (a4)
   - da A und B Formeln sind (Punkt 1)
   - und $\uparrow$ ein binäres Operatorsymbol ist.
3. $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$ ist eine Formel, (a4)
   - da $(A \uparrow B)$ und $(A \uparrow B)$ Formeln sind (Punkt 2)
   - und $\uparrow$ ein binäres Operatorsymbol ist.

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$A \wedge B$ ist keine aussagenlogische Formel.

- $\mathcal{A}$ ist die kleinste Menge mit den Eigenschaften (a1)–(a4), daher kann $\wedge$ nur aufgrund von (a4) in einer Formel vorkommen.
- Dann muss es aber auch ein Klammernpaar geben.
- $A \wedge B$ enthält $\wedge$, aber keine Klammern – Widerspruch.

Formelsyntax: Beispiel einer induktiven Definition

$\mathcal{A}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$\mathcal{U}$ ... Menge aller Zeichenketten bestehend aus Variablen, Operatorsymbolen und Klammern

$\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ ... Grundelemente

$$\left.\begin{array}{l} f_{\neg}(F) = \neg F \\ f_{\wedge}(F, G) = (F \wedge G) \\ f_{\uparrow}(F, G) = (F \uparrow G) \\ \ldots \\ f_{\subset}(F, G) = (F \subset G) \end{array}\right\} \ldots \text{ Konstruktionsfunktionen}$$

Aussagenlogik – Semantik

$((A \land \neg B) \supset \bot)$ – wahr oder falsch?

Hängt ab

- vom Wert der Variablen A und B und
- von der Bedeutung der Symbole $\land$, $\neg$, $\supset$ und $\bot$.

Interpretationen

$\mathbb{B} = \{1, 0\}$ ... Wahrheitswerte
$I\colon \mathcal{V} \mapsto \mathbb{B}$ ... Wahrheitsbelegung, Interpretation
$\mathcal{I} = \{\, I \mid I\colon \mathcal{V} \mapsto \mathbb{B} \,\}$ ... Menge aller Interpretationen

$I(A) = I(C) = 1$ und $I(v) = 0$ sonst
„Die elementaren Aussagen A und C sind wahr, die übrigen sind falsch.“

Semantik aussagenlogischer Formeln

Der Wert einer Formel in einer Interpretation I wird festgelegt durch die Funktion $\mathsf{val}\colon \mathcal{I} \times \mathcal{A} \mapsto \mathbb{B}$:

(v1) $\mathsf{val}_I(A) = I(A)$ für $A \in \mathcal{V}$;

(v2) $\mathsf{val}_I(\top) = 1$ und $\mathsf{val}_I(\bot) = 0$;

(v3) $\mathsf{val}_I(\neg F) = \mathsf{not}\,\mathsf{val}_I(F)$;

(v4) $\mathsf{val}_I(\,(F * G)\,) = \mathsf{val}_I(F) \circledast \mathsf{val}_I(G)$,
wobei $\circledast$ die logische Funktion zum Operator $*$ ist.

(v4) ist eine Abkürzung für:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{val}_I(\,(F \wedge G)\,) &= \mathsf{val}_I(F) \text{ and } \mathsf{val}_I(G) \\
\mathsf{val}_I(\,(F \vee G)\,) &= \mathsf{val}_I(F) \text{ or } \mathsf{val}_I(G) \\
\mathsf{val}_I(\,(F \equiv G)\,) &= \mathsf{val}_I(F) \text{ iff } \mathsf{val}_I(G) \\
\mathsf{val}_I(\,(F \supset G)\,) &= \mathsf{val}_I(F) \text{ implies } \mathsf{val}_I(G) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(v1) $\mathrm{val}_I(A) = I(A)$ für $A \in \mathcal{V}$;

(v2) $\mathrm{val}_I(\top) = 1$ und $\mathrm{val}_I(\bot) = 0$;

(v3) $\mathrm{val}_I(\neg F) = \text{not}\,\mathrm{val}_I(F)$;

(v4) $\mathrm{val}_I(\,(F * G)\,) = \mathrm{val}_I(F) \circledast \mathrm{val}_I(G)$,
wobei $\circledast$ die logische Funktion zum Operator $*$ ist.

Wert von $((A \wedge \neg B) \supset \bot)$ für $I(A) = 1$ und $I(B) = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{val}_I(((A \wedge \neg B) \supset \bot)) &= \mathrm{val}_I((A \wedge \neg B)) \text{ implies } \mathrm{val}_I(\bot) \\
&= (\mathrm{val}_I(A) \text{ and } \mathrm{val}_I(\neg B)) \text{ implies } 0 \\
&= (1 \text{ and not}\,\mathrm{val}_I(B)) \text{ implies } 0 \\
&= (1 \text{ and not}\,0) \text{ implies } 0 \\
&= (1 \text{ and } 1) \text{ implies } 0 \\
&= 1 \text{ implies } 0 = 0
\end{aligned}
$$

Wahrheitstafel

- Kompakte Berechnung der Formelwerte für alle Interpretationen
- Unter jedem Operator steht der Wert der entsprechenden Teilformel.

A	B	$((A \wedge \neg B) \supset \bot)$
1	1	1 0 0 1 1 0
1	0	1 1 1 0 0 0
0	1	0 0 0 1 1 0
0	0	0 0 1 0 1 0

bedeutet:

$I(A) = 1,\ I(B) = 1$: $\mathrm{val}_I(\cdots) = \cdots = 1$

$I(A) = 1,\ I(B) = 0$: $\mathrm{val}_I(\cdots) = \cdots = 0$

$I(A) = 0,\ I(B) = 1$: $\mathrm{val}_I(\cdots) = \cdots = 1$

$I(A) = 0,\ I(B) = 0$: $\mathrm{val}_I(\cdots) = \cdots = 1$

false
0
$\bot$

x	not
1	0
0	1
	$\neg$

x	y	and	implies
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1
		$\wedge$	$\supset$

Eine Formel F heißt

- gültig, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 1$ für alle $I \in \mathcal{I}$; „Tautologie“
- erfüllbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 1$ für mindestens ein $I \in \mathcal{I}$;
- widerlegbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 0$ für mindestens ein $I \in \mathcal{I}$;
- unerfüllbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 0$ für alle $I \in \mathcal{I}$. „Kontradiktion“

Folgerungen:

- Eine gültige Formel ist erfüllbar, aber weder widerlegbar noch unerfüllbar.
- Eine erfüllbare Formel kann gültig oder widerlegbar sein, aber nicht unerfüllbar.
- Eine widerlegbare Formel kann erfüllbar oder unerfüllbar sein, aber nicht gültig.
- Eine unerfüllbare Formel ist widerlegbar, aber weder gültig noch erfüllbar.
- F ist gültig/erfüllbar/widerlegbar/unerfüllbar genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar/widerlegbar/erfüllbar/gültig ist.

$((A \wedge \neg B) \supset \bot)$ ist erfüllbar und widerlegbar.

A	B	$((A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$	$\supset$	$\bot)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0

Die Formel ist

- erfüllbar (daher nicht unerfüllbar),
- widerlegbar (daher nicht gültig).

$(A \vee \neg A)$ ist gültig und erfüllbar.

A	$(A$	$\vee$	$\neg$	$A)$
1	1	1	0	1
0	0	1	1	0

Die Formel ist

- gültig (daher nicht widerlegbar),
- erfüllbar (daher nicht unerfüllbar).

$(A \wedge \neg A)$ ist unerfüllbar und widerlegbar.

A	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
1	1	0	0	1
0	0	0	1	0

Die Formel ist

- unerfüllbar (daher nicht erfüllbar),
- widerlegbar (daher nicht gültig).

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen äquivalent, geschrieben $F = G$, wenn $\mathrm{val}_I(F) = \mathrm{val}_I(G)$ für alle Interpretationen I gilt.

$\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A \vee \neg B)$ sind äquivalent

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$=$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0 1 1 1	✓	0 1 0 0 1
1	0	1 1 0 0	✓	0 1 1 1 0
0	1	1 0 0 1	✓	1 0 1 0 1
0	0	1 0 0 0	✓	1 0 1 1 0

Äquivalenz bleibt bei der Ersetzung von Variablen durch Formeln erhalten.

$\neg(\quad A \quad \wedge \; B \;) = (\neg \quad A \quad \vee \neg \; B \;)$ $\qquad [A \mapsto (C \vee D),\ B \mapsto \neg D]$

Ersetzen einer Teilformel durch eine äquivalente liefert eine äquiv. Formel.

$(A \supset \neg(A \wedge B))$ $\qquad \neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen äquivalent, geschrieben $F = G$, wenn $\mathsf{val}_I(F) = \mathsf{val}_I(G)$ für alle Interpretationen I gilt.

$\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A \vee \neg B)$ sind äquivalent

A	B	$\neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$
1	1	0 1 1 1 ✓ 0 1 0 0 1
1	0	1 1 0 0 ✓ 0 1 1 1 0
0	1	1 0 0 1 ✓ 1 0 1 0 1
0	0	1 0 0 0 ✓ 1 0 1 1 0

Äquivalenz bleibt bei der Ersetzung von Variablen durch Formeln erhalten.

$\neg((C \vee D) \wedge \neg D) = (\neg(C \vee D) \vee \neg\neg D)$ $\qquad [A \mapsto (C \vee D),\ B \mapsto \neg D]$

Ersetzen einer Teilformel durch eine äquivalente liefert eine äquiv. Formel.

$(A \supset \neg(A \wedge B)) = (A \supset (\neg A \vee \neg B))$ $\qquad \neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$

$\langle \mathbb{B}, \text{and}, \text{or}, \text{not}, 0, 1 \rangle$ ist eine Boolesche Algebra

Das heißt, es gelten folgende Gleichungen.

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	Assoziativität
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$	Kommutativität
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	Idempotenz
$A \wedge \top = A$	$A \vee \bot = A$	Neutralität
$A \wedge \neg A = \bot$	$A \vee \neg A = \top$	Komplement
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$		Distributivität
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$		

Schreibvereinfachung: keine Außenklammern, keine Klammern bei geschachteltem $\wedge$ oder $\vee$ (Assoziativität!)

$$A \wedge B \wedge C = ((A \wedge B) \wedge C) = (A \wedge (B \wedge C))$$

$\langle 2^M, \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, M \rangle$ ... Beispiel einer anderen Booleschen Algebra
2^M ... Menge aller Teilmengen der Menge M, Potenzmenge
$\overline{X}$ ... Komplement der Menge X bzgl. M

Weitere Äquivalenzen

Ersetzen von Junktoren durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$

$$
\begin{aligned}
A \uparrow B &= \neg A \vee \neg B & \qquad A \equiv B &= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)\\
A \downarrow B &= \neg A \wedge \neg B & &= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\\
A \supset B &= \neg A \vee B & A \not\equiv B &= (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)\\
A \subset B &= A \vee \neg B & &= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)
\end{aligned}
$$

Verschieben der Negation

$$
\left.\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B\\
\neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B
\end{aligned}\right\}\ \text{De Morgan Regeln} \qquad \neg\neg A = A
$$

Äquivalenzen für $\top$ und $\bot$

$$
\begin{array}{llll}
A \wedge \top = A & A \wedge \bot = \bot & A \wedge \neg A = \bot & \neg\top = \bot\\
A \vee \bot = A & A \vee \top = \top & A \vee \neg A = \top & \neg\bot = \top
\end{array}
$$

$(X \uparrow Y) \uparrow (\top \uparrow Y)$	$A \uparrow B = \neg A \vee \neg B$
$= (\neg X \vee \neg Y) \uparrow (\neg \top \vee \neg Y)$	$A \uparrow B = \neg A \vee \neg B$
$= \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg(\neg \top \vee \neg Y)$	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
$= (\neg\neg X \wedge \neg\neg Y) \vee (\neg\neg \top \wedge \neg\neg Y)$	$\neg\neg A = A$
$= (X \wedge Y) \vee (\top \wedge Y)$	$A \wedge \top = A$, Komm. $\wedge$
$= (X \wedge Y) \vee Y$	$A \vee (A \wedge B) = A$, Komm. $\wedge, \vee$
$= Y$	

Logische Konsequenz

$F_1, \ldots, F_n \models_I G$: „Aus $\mathrm{val}_I(F_1) = \cdots = \mathrm{val}_I(F_n) = 1$ folgt $\mathrm{val}_I(G) = 1$."

„Falls in der Wahrheitsbelegung I alle Prämissen wahr sind,
dann ist auch die Konklusion wahr in I."

$I(A)$	$I(B)$	$A,$	A	$\vee$	B	$\models_I$	B
1	1	1	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	1	0	↯	0
0	1	0	0	1	1	✓	1
0	0	0	0	0	0	✓	0

Logische Konsequenz

$F_1, \ldots, F_n \models G$: $F_1, \ldots, F_n \models_I G$ gilt für alle Interpretationen I.

„Die Formel G ist eine logische Konsequenz der Formeln $F_1, \ldots, F_n$."

„Die Formel G folgt aus den Formeln $F_1, \ldots, F_n$."

Konvention: „$\models G$" ($n = 0$) bedeutet „G ist gültig."

$A, A \vee B \models B$?   Nein!

$I(A)$	$I(B)$	$A,$	$A \vee B$	$\models_I$	B
1	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	↯	0
0	1	0	1	✓	1
0	0	0	0	✓	0

$I(A) = 1$, $I(B) = 0$:
Es gilt $\text{val}_I(A) = \text{val}_I(A \vee B) = 1$,
aber $\text{val}_I(B) \neq 1$!

I heißt Gegenbeispiel.

$A, A \supset B \models B$?   Ja!

$I(A)$	$I(B)$	$A,$	$A \supset B$	$\models_I$	B
1	1	1	1	✓	1
1	0	1	0	✓	0
0	1	0	1	✓	1
0	0	0	1	✓	0

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \supset B \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{l} x \\ \text{Wenn } x\text{, dann } y. \end{array}}{y}$$

Ist eine gültige Inferenzregel!

Kriterium für die Gültigkeit von Inferenzregeln

Immer wenn alle Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr.

Äquivalenz, Konsequenz und Gültigkeit

Die Formeln F und G sind äquivalent ($F = G$) genau dann,
wenn $F \equiv G$ eine gültige Formel ist.

Deduktionstheorem

G folgt aus $F_1, \ldots, F_n$ genau dann, wenn $F_n \supset G$ aus $F_1, \ldots, F_{n-1}$ folgt.

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $F_1, \ldots, F_{n-1} \models F_n \supset G$.

Mehrfache Anwendung liefert:

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $F_1 \supset (F_2 \supset \cdots (F_n \supset G) \cdots)$ gültig.

Wegen $A \supset (B \supset C) = (A \wedge B) \supset C$ erhalten wir weiters:

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \supset G$ gültig.

Das heißt: Semantik ($=$ und $\models$) ausdrückbar in der Syntax ($\equiv$ und $\supset$).

Ist nicht in jeder Logik möglich!

Inhalt

Rezept für Zweifelsfälle der aussagenlogischen Modellierung

1. Identifiziere die elementaren Aussagen.
2. Analysiere alle Wahrheitsbelegungen.
3. Wähle geeignete logische Funktionen (unbeirrt von Intuition und natürlicher Sprache)

Klingt ja nicht schlecht, aber:

Wie kann man eine beliebige Funktion auf eine Kombination der bekannten logischen Grundfunktionen zurückführen?

Beziehungsweise:

Wie kann man eine beliebige Funktion mit den bekannten Operatoren als Formel darstellen?

Gesucht: Ein allgemeines Verfahren (ein Algorithmus), das zu einer gegebenen Funktion eine passende Formel liefert.

Von der Funktion zur Formel

Gegeben: Funktion $f : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ (z.B. als Wahrheitstafel)
Gesucht: Formel, die f darstellt

A	B	C	$F[A, B, C]$?
x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Von der Funktion zur Formel

Gegeben: Funktion $f\colon \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ (z.B. als Wahrheitstafel)
Gesucht: Formel, die f darstellt

A x	B y	C z	$F[A,B,C]$ $f(x,y,z)$	$:= (A \wedge B \wedge C) \vee$	$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$	$(\neg A \wedge B \wedge C)$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

DNF_f ... „Disjunktive Normalform zur Funktion f“

Von der Funktion zur Formel

Gegeben: Funktion $f : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ (z.B. als Wahrheitstafel)
Gesucht: Formel, die f darstellt

A	B	C	$F[A, B, C]$?
x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Von der Funktion zur Formel

Gegeben: Funktion $f: \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ (z.B. als Wahrheitstafel)
Gesucht: Formel, die f darstellt

A	B	C	$F[A,B,C] := (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \cdots$					
x	y	z	$f(x,y,z)$					
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0

KNF_f ... „Konjunktive Normalform zur Funktion f“

Von der Funktion $f\colon \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ zur Formel DNF_f

Notation: $\bigwedge\{F, G, H, \dots\} = F \wedge G \wedge H \wedge \cdots \qquad \bigwedge\{\} = \top$

$\bigvee\{F, G, H, \dots\} = F \vee G \vee H \vee \cdots \qquad \bigvee\{\} = \bot$

Charakteristisches Konjunkt für $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$:
$K_{\vec{b}} = \bigwedge\{\, A_i \mid b_i = 1,\ i = 1..n \,\} \wedge \bigwedge\{\, \neg A_i \mid b_i = 0,\ i = 1..n \,\}$

$\vec{b} = (1,\, 0,\, 1,\, 1) \quad \Longrightarrow \quad K_{\vec{b}} = A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$

$I_{\vec{b}}$ ... Interpretation definiert durch $I_{\vec{b}}(A_i) = b_i$

$K_{\vec{b}}$ hat den Wert 1 für $I_{\vec{b}}$, und 0 für alle anderen Interpretationen.

$I_{\vec{b}}\colon A_1 \mapsto 1,\ A_2 \mapsto 0,\ A_3 \mapsto 1,\ A_4 \mapsto 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{val}_{I_{\vec{b}}}(K_{\vec{b}}) = 1$

Disjunktive Normalform für $f\colon \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$

$\mathrm{DNF}_f = \bigvee\{\, K_{\vec{b}} \mid f(\vec{b}) = 1,\ \vec{b} \in \mathbb{B}^n \,\}$ repräsentiert die Funktion f, d.h.:
$\mathrm{val}_{I_{\vec{b}}}(\mathrm{DNF}_f) = f(\vec{b})$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{B}^n$.

Von der Funktion $f\colon \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ zur Formel KNF_f

Notation: $\bigwedge\{F, G, H, \dots\} = F \wedge G \wedge H \wedge \cdots \qquad \bigwedge\{\} = \top$

$\bigvee\{F, G, H, \dots\} = F \vee G \vee H \vee \cdots \qquad \bigvee\{\} = \bot$

Charakteristisches Disjunkt für $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$:
$D_{\vec{b}} = \bigvee\{\, A_i \mid b_i = 0,\ i = 1..n \,\} \vee \bigvee\{\, \neg A_i \mid b_i = 1,\ i = 1..n \,\}$

$\vec{b} = (1,\ 0,\ 1,\ 1) \quad \Longrightarrow \quad D_{\vec{b}} = \neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 \vee \neg A_4$

$I_{\vec{b}}$ ... Interpretation definiert durch $I_{\vec{b}}(A_i) = b_i$

$D_{\vec{b}}$ hat den Wert 0 für $I_{\vec{b}}$, und 1 für alle anderen Interpretationen.

$I_{\vec{b}}\colon A_1 \mapsto 1,\ A_2 \mapsto 0,\ A_3 \mapsto 1,\ A_4 \mapsto 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{val}_{I_{\vec{b}}}(D_{\vec{b}}) = 0$

Konjunktive Normalform für $f\colon \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$

$\mathrm{KNF}_f = \bigwedge\{\, D_{\vec{b}} \mid f(\vec{b}) = 0,\ \vec{b} \in \mathbb{B}^n \,\}$ repräsentiert die Funktion f, d.h.:
$\mathrm{val}_{I_{\vec{b}}}(\mathrm{KNF}_f) = f(\vec{b})$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{B}^n$.

A_1	A_2 $\vec{b}$	A_3	$f(\vec{b})$	$K_{\vec{b}}$	$D_{\vec{b}}$
1	1	1	1	$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 =: K_{111}$	
1	1	0	0		$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3 =: D_{110}$
1	0	1	0		$\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 =: D_{101}$
1	0	0	1	$A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3 =: K_{100}$	
0	1	1	1	$\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 =: K_{011}$	
0	1	0	0		$A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3 =: D_{010}$
0	0	1	0		$A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 =: D_{001}$
0	0	0	0		$A_1 \vee A_2 \vee A_3 =: D_{000}$

$\mathrm{DNF}_f = K_{111} \vee K_{100} \vee K_{011}$

$\mathrm{KNF}_f = D_{110} \wedge D_{101} \wedge D_{010} \wedge D_{001} \wedge D_{000}$

Folgerung:

$\{\mathrm{not}, \mathrm{and}, \mathrm{or}\}$ ist funktional vollständig.

Inhalt

Normalformen

Literal: Variable oder negierte Variable, also A, $\neg A$, B, $\neg B$, ...

Negationsnormalform (NNF)

- Literale sowie $\top$ und $\bot$ sind in NNF.
- $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ sind in NNF, wenn F und G in NNF sind.
- Keine Formel sonst ist in NNF.

NNF: $(\neg A \vee ((B \vee \neg C) \wedge \top))$ Keine NNFs: $\neg\neg A$, $\neg(A \wedge B)$, $\neg\bot$

DNF_f und KNF_f sind Formeln in NNF.

Disjunktive Normalform (DNF)

$\top$, $\bot$ sowie Disjunktionen von Konjunktion von Literalen:

$$({\scriptstyle(\neg)}A_{1,1} \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_{1,2} \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_{1,3} \wedge \cdots) \vee ({\scriptstyle(\neg)}A_{2,1} \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_{2,2} \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_{2,3} \wedge \cdots) \vee \cdots$$

Konjunktive Normalform (KNF)

$\top$, $\bot$ sowie Konjunktionen von Disjunktion von Literalen:

$$({\scriptstyle(\neg)}A_{1,1} \vee {\scriptstyle(\neg)}A_{1,2} \vee {\scriptstyle(\neg)}A_{1,3} \vee \cdots) \wedge ({\scriptstyle(\neg)}A_{2,1} \vee {\scriptstyle(\neg)}A_{2,2} \vee {\scriptstyle(\neg)}A_{2,3} \vee \cdots) \wedge \cdots$$

Normalformen

Formeln, die gleichzeitig in DNF und KNF sind:

- $\top$
- $\bot$
- ${\scriptstyle(\neg)}A_1 \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_2 \wedge \cdots \wedge {\scriptstyle(\neg)}A_n$
- ${\scriptstyle(\neg)}A_1 \vee {\scriptstyle(\neg)}A_2 \vee \cdots \vee {\scriptstyle(\neg)}A_n$

Normalformen für die Funktion f von vorhin

$\mathrm{DNF}_f = K_{111} \vee K_{100} \vee K_{011}$	kanonische (maximale) DNF, NNF
$(A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$	minimale DNF, NNF
$\mathrm{KNF}_f = D_{110} \wedge D_{101} \wedge D_{010} \wedge D_{001} \wedge D_{000}$	kanonische KNF, NNF
$(A_1 \vee A_3) \wedge (\neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$	minimale KNF, NNF
$(A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_3)$	andere minimale KNF, NNF

Normalformen sind in der Regel nicht eindeutig.
Typische Problemstellung: Finde kleine oder kleinste Normalform.

Normalformen

Weitere Normalformen:

- Beschränkung auf andere Operatoren, etwa $\uparrow$
- Andere Einschränkungen der Struktur, etwa
  Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen
  (ermöglicht kleinere Formeln als DNF oder KNF)

Noch mehr Normalformen für die Funktion f von vorhin

$(A_2 \uparrow A_3) \uparrow (A_1 \uparrow ((A_2 \uparrow A_2) \uparrow (A_3 \uparrow A_3) \uparrow (A_2 \uparrow A_2) \uparrow (A_3 \uparrow A_3)))$

$((A_1 \wedge \neg A_3) \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee A_3)$ NNF

Konstruktion von DNFs/KNFs – Semantische Methode

Gegeben: Aussagenlogische Formel F
Gesucht: Äquivalente Formel in DNF/KNF

1. Stelle die zu F gehörige Funktion f als Wahrheitstafel dar.
2. Konstruiere DNF_f bzw. KNF_f.

A_1	A_2	A_3	$F := (A_1 \supset (A_2 \equiv A_3)) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge A_3))$		
1	1	1	1	K_{111}	
1	1	0	0		D_{110}
1	0	1	0		D_{101}
1	0	0	1	K_{100}	
0	1	1	1	K_{011}	
0	1	0	0		D_{010}
0	0	1	0		D_{001}
0	0	0	0		D_{000}

DNF: $F = K_{111} \vee K_{100} \vee K_{011}$
KNF: $F = D_{110} \wedge D_{101} \wedge D_{010} \wedge D_{001} \wedge D_{000}$

Konstruktion von DNFs/KNFs – Algebraische Methode

Gegeben: Aussagenlogische Formel F
Gesucht: Äquivalente Formel in DNF/KNF

1. Ersetze alle Junktoren durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.
   $A \uparrow B = \neg A \vee \neg B \qquad A \downarrow B = \neg A \wedge \neg B \qquad A \supset B = \neg A \vee B \qquad A \subset B = A \vee \neg B$
   $A \equiv B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
   $A \not\equiv B = (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
2. Verschiebe Negationen nach innen, eliminiere Doppelnegationen.
   $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \qquad \neg\neg A = A$
3. Wende das Distributivgesetz an.
   DNF: Schiebe Disjunktionen nach außen mittels
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   KNF: Schiebe Konjunktionen nach außen mittels
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4. Eliminiere $\top$ und $\bot$.
   $A \wedge \top = A \qquad A \wedge \bot = \bot \qquad A \wedge \neg A = \bot \qquad \neg\top = \bot$
   $A \vee \bot = A \qquad A \vee \top = \top \qquad A \vee \neg A = \top \qquad \neg\bot = \top$

(Äquivalenzen werden hier von links nach rechts angewendet.)

$((A_1 \uparrow A_2) \supset \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge \bot))$

1. Ersetze alle Junktoren durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$:
   $((\neg A_1 \vee \neg A_2) \supset \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge \bot))$
   $(\neg(\neg A_1 \vee \neg A_2) \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge \bot))$
   $(\neg(\neg A_1 \vee \neg A_2) \vee \neg A_2) \wedge (\neg\neg A_1 \vee (A_2 \wedge \bot))$
2. Verschiebe Negationen nach innen, eliminiere Doppelnegationen:
   $((\neg\neg A_1 \wedge \neg\neg A_2) \vee \neg A_2) \wedge (\neg\neg A_1 \vee (A_2 \wedge \bot))$
   $((A_1 \wedge A_2) \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee (A_2 \wedge \bot))$
3. Wende das Distributivgesetz an:

DNF: $(((A_1 \wedge A_2) \vee \neg A_2) \wedge A_1) \vee (((A_1 \wedge A_2) \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \wedge \bot))$
$(((A_1 \wedge A_2) \vee \neg A_2) \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_2 \wedge \bot) \vee (\neg A_2 \wedge A_2 \wedge \bot)$
$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_1) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_2 \wedge \bot) \vee (\neg A_2 \wedge A_2 \wedge \bot)$
$(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \bot) \vee (\neg A_2 \wedge A_2 \wedge \bot)$ (Idemp.)

KNF: $(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee (A_2 \wedge \bot))$
$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \bot)$

4. Vereinfache mit den Regeln für $\top$ und $\bot$:

DNF: $(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \bot) \vee (\neg A_2 \wedge A_2 \wedge \bot)$

$(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \bot) \vee \bot$

$(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \bot)$

$(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1) \vee \bot$

$(A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_2 \wedge A_1)$ DNF erreicht!

$A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_2)$ (Distributivgesetz, keine DNF mehr)

$A_1 \wedge \top$

A_1 (wieder DNF)

KNF: $(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \bot)$

$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge A_1$ KNF erreicht!

$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge A_1$ (Absorption)

$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge \top \wedge A_1$ (keine KNF mehr!)

$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge A_1$ (wieder KNF)

A_1 (Absorption)

Welche Methode ist besser?

Gefühlsmäßig: Die semantische Methode ist übersichtlicher.

Theoretisch: Beide Methoden sind schlecht, denn beide sind im schlechtesten Fall exponentiell.

- Semantische Methode: Aufwand immer exponentiell in Variablenzahl! Wahrheitstafel besitzt $2^{\text{Variablenzahl}}$ Zeilen.
- Algebraische Methode: Schritt 3 (Distributivgesetz) ist aufwändig, kann zu einer exponentiellen Verlängerung der Formel führen.

Praktisch:

- Semantische Methode nur brauchbar bei Formeln mit sehr wenigen Variablen. Immer exponentiell in Variablenzahl, liefert immer die maximale DNF/KNF.
- Algebraische Methode teilweise auch für große Formeln brauchbar, insbesondere mit Computerunterstützung. Kann auch kleine DNFs/KNFs liefern.

Inhalt

Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik

Erfüllbarkeitsproblem (Satisfiability, SAT)

Gegeben: aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar, d.h., gibt es ein $I \in \mathcal{I}$, sodass $\mathrm{val}_I(F) = 1$?

Effiziente Verfahren zur Lösung von SAT sind wichtig in der Praxis:

- Viele praktische Aufgaben lassen sich als Probleme der Aussagenlogik formulieren, wie z.B.
  - Verifikation von Hard- und Software
  - Planungsaufgaben, Logistik-Probleme
- Die meisten aussagenlogischen Fragen lassen sich zu einem (Un)Erfüllbarkeitsproblem umformulieren:

$$\begin{aligned}
G \text{ gültig} \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg G \text{ unerfüllbar} \\
G \text{ widerlegbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg G \text{ erfüllbar} \\
G = H \quad &\Longleftrightarrow \quad G \not\equiv H \text{ unerfüllbar} \\
F_1, \ldots, F_n \models G \quad &\Longleftrightarrow \quad F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G \text{ unerfüllbar}
\end{aligned}$$

Methoden zur Lösung von SAT

Wahrheitstafel:

- Berechne den Formelwert der Reihe nach für jede Interpretation. Antwort „ja“, sobald man den Wert 1 erhält; „nein“, wenn immer 0.
- Unbrauchbar, da exponentiell: $2^{\text{Variablenzahl}}$ Interpretationen!

Umwandlung in DNF:

- Wandle F in eine disjunktive Normalform um. Antwort „nein“, wenn man $\perp$ erhält; „ja“ sonst.
- Unbrauchbar: F meistens in Fast-KNF. Distributivgesetz verlängert F exponentiell.

SAT-Solver: Programme, die SAT lösen.

- Verwenden fortgeschrittene algebraische/graphenorientierte/logische Methoden mit besonderen Datenstrukturen.
- Können SAT für Formeln mit Millionen von Variablen lösen.
- Stand der Technik bei der Verifikation von Prozessoren etc.
- Aber: Exponentielle Laufzeit für manche Formelarten!

\$ 1.000.000,– Prämie für einen effizienten SAT-Solver

... oder für den Beweis, dass es diesen nicht geben kann.

Abzuholen beim Clay Mathematics Institute (www.claymath.org)
für das offene Milleniumsproblem „P versus NP".

Weiters warten ewiger Ruhm, eine Universitätsstelle, ...

P: Klasse der Probleme, die sich effizient (polynomiell) lösen lassen.

NP: Klasse jener Probleme, deren Lösungen sich effizient (polynomiell) verifizieren lassen; die Suche nach der Lösung kann aber aufwändig sein.

P versus NP (Stephen Cook, 1971)

Gilt $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ oder $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ (gleichbedeutend mit $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{NP}$)?

NP-Vollständigkeit

Die schwierigsten Probleme in NP heißen NP-vollständig.
Ihr Kennzeichen:

Kann man ein NP-vollständiges Problem effizient lösen,
dann kann man alle Probleme in NP effizient lösen.

HAMILTON-KREIS ist NP-vollständig

Gegeben: Party-Gäste, von denen sich einige nicht mögen.
Frage: Kann man die Gruppe so um einen runden Tisch setzen, dass sich je zwei Sitznachbarn vertragen?

- Wenn alle sitzen, ist leicht zu prüfen, ob sich alle Nachbarn verstehen.
- Das Finden einer geeigneten Sitzordnung ist aber im Allgemeinen schwierig. Exponentiell?

SAT ist NP-vollständig

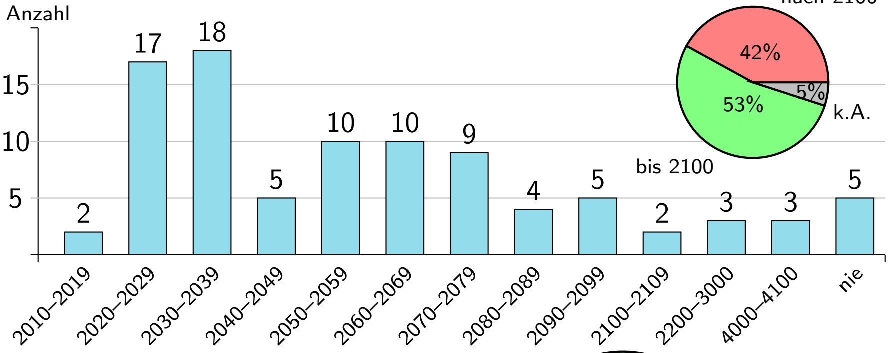
Gegeben: eine aussagenlogische Formel.
Frage: Ist die Formel erfüllbar?

- Ist die Interpretation I gegeben, lässt sich $\mathrm{val}_I(F) = 1$ leicht überprüfen.
- Das Finden der Interpretation ist aber schwierig. Exponentiell?

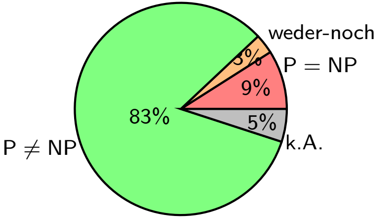
SAT polynomiell lösbar $\Longrightarrow$ P = NP

SAT nicht polynomiell lösbar $\Longrightarrow$ P $\neq$ NP

Wann wird die Frage $P \stackrel{?}{=} NP$ gelöst werden?



Wie wird die Antwort lauten?



[W.I.Gasarch, 2012, Meinungsumfrage unter 152 Experten]

Falls Sie SAT nicht ausreichend inspiriert ...

MINESWEEPER ist NP-vollständig

Gegeben: eine Minesweeper-Stellung
Frage: Ist die Stellung möglich?

Beispiel einer unmöglichen Stellung:

- „2“, aber 5 Bomben in der Umgebung
- „6“, aber nur drei Bomben möglich
- „1“, aber keine Bombe in der Umgebung

MINESWEEPER polynomiell lösbar $\Longrightarrow$ P = NP

MINESWEEPER nicht polynomiell lösbar $\Longrightarrow$ P $\neq$ NP

Es sind mittlerweile hunderte von NP-vollständigen Problemen aus allen Bereichen der Informatik bekannt.

Inhalt

House

Max wird mit hohem Fieber und ausgeprägten Gliederschmerzen in das Spital eingeliefert. Dr. House diskutiert die Diagnose mit einer Kollegin.

House: „Wenn der Patient Fieber hat, handelt es sich um Grippe oder Erkältung.“

Cameron: „Wenn er keine starken Gliederschmerzen hat, dann hat er auch keine Grippe.“

House: „Jedenfalls weisen hohes Fieber und starke Gliederschmerzen immer auf Grippe hin.“

Cameron: “Er hat sicher nicht beide Krankheiten gleichzeitig.“

Wie lautet die Diagnose?
Wie lässt sie sich mit Hilfe der Aussagenlogik finden und begründen?

House – Wahl der Aussagenvariablen

Aussagenvariablen können nur Aussagen repräsentieren, die einen Wahrheitswert besitzen.
Einzelne Haupt-, Zeit- oder Eigenschaftswörter sind keine Aussagen!

Falsch: $A =$ „krank“ oder $A =$ „Fieber“.

Möglich: $A =$ „Max ist krank“ oder $A =$ „Der Patient hat Fieber“.

Max wird mit hohem Fieber und ausgeprägten Gliederschmerzen in das Spital eingeliefert.

„Max wird mit ... eingeliefert“ $= A$?

„Max hat hohes Fieber“ $= A$,
„Max hat ausgeprägte Gliederschmerzen“ $= B$ und
„Max wird in das Spital eingeliefert“ $= C$?

„Max hat hohes Fieber“ $=$ „Max hat Fieber“ $= A$ und
„Max hat ausgeprägte Gl.schmerzen“ $=$ „Max hat Gl.schmerzen“ $= B$?

House – Wahl der Aussagenvariablen

Dr. House diskutiert die Diagnose mit einer Kollegin.

„Dr. House diskutiert … mit einer Kollegin“ $= D$?

Wenn der Patient Fieber hat, handelt es sich um Grippe oder Erkältung.

„Der Patient hat Fieber“ $= E$?

„Der Patient hat Fieber“ = „Max hat Fieber“ $= A$?

Cameron: “Er hat sicher nicht beide Krankheiten gleichzeitig.“

„Cameron sagt, dass er nicht beide Krankheiten gleichzeitig hat.“ $= F$?

„Max kann nicht beide Krankheiten gleichzeitig haben.“ $= F$?

- Elimination von Abkürzungen und Referenzen
  „Er hat beide Krankheiten“ = „P. hat Grippe“ + „P. hat Erkältung“
- Generalisierung: Zusammenfassen von gleichartigen Aussagen
- Abstraktion: Weglassen von Details
- Konzentration auf das Wesentliche: Identifikation der relevanten Teilaussagen

Aber:

- Was zusammengefasst wurde, kann nicht mehr getrennt analysiert werden.
- Was weggelassen wurde, kann nicht für die Argumentation verwendet werden.
- Was nicht zusammenfasst wurde, aber zusammengehört, muss durch zusätzliche Formeln in Beziehung gesetzt werden.

Was kann man zusammenfassen? Was weglassen? Was ist wesentlich?

House – Wahl der Aussagenvariablen

Max wird mit hohem Fieber und ausgeprägten Gliederschmerzen in das Spital eingeliefert. Dr. House diskutiert die Diagnose mit einer Kollegin.

House: „Wenn der Patient Fieber hat, handelt es sich um Grippe oder Erkältung."

Cameron: „Wenn er keine starken Gliederschmerzen hat, dann hat er auch keine Grippe."

House: „Jedenfalls weisen hohes Fieber und starke Gliederschmerzen immer auf Grippe hin."

Cameron: "Er hat sicher nicht beide Krankheiten gleichzeitig."

F ... „Max/Patient hat (hohes) Fieber."
S ... „Max/Patient hat starke/ausgeprägte Gliederschmerzen."
G ... „Max/Patient hat eine Grippe."
E ... „Max/Patient hat eine Erkältung."

House – aussagenlogische Modellierung

F ... „Max/Patient hat (hohes) Fieber."
S ... „Max/Patient hat starke/ausgeprägte Gliederschmerzen."
G ... „Max/Patient hat eine Grippe."
E ... „Max/Patient hat eine Erkältung."

Max wird mit hohem Fieber und ausgeprägten Gliederschmerzen in das Spital eingeliefert. Dr. House diskutiert die Diagnose mit einer Kollegin.	$F_1 := F \wedge S$
House: „Wenn der Patient Fieber hat, handelt es sich um Grippe oder Erkältung."	$F_2 := F \supset (G \vee E)$
Cameron: „Wenn er keine starken Gliederschmerzen hat, dann hat er auch keine Grippe."	$F_3 := \neg S \supset \neg G$
House: „Jedenfalls weisen hohes Fieber und starke Gliederschmerzen immer auf Grippe hin."	$F_4 := (F \wedge S) \supset G$
Cameron: "Er hat sicher nicht beide Krankheiten gleichzeitig."	$F_5 := \neg(G \wedge E)$

House – Diagnose

Finde alle Interpretationen I, in denen alle Formeln wahr sind.

Vereinfachung: Prüfe nur Interpretationen, in denen $F_1 = F \wedge S$ wahr ist.

F	S	G	E	F_1	$F \supset (G \vee E)$	$\neg S \supset \neg G$	$(F \wedge S) \supset G$	$\neg(G \wedge E)$
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0

$I(G) = 1$, $I(E) = 0 \Longrightarrow$ Die Diagnose lautet auf „Grippe".

Inhalt

Dualität von Funktionen, Operatoren und Formeln

Beobachtung 1: „and“ und „or“ verhalten sich spiegelbildlich bzgl. 0 und 1.

x	y	x and y	x or y
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

x	y	x or y	x and y
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

„and“ ist eine Konjunktion für 1 und eine Disjunktion für 0.
„or“ ist eine Konjunktion für 0 und eine Disjunktion für 1.

Beobachtung 2: Boolesche Algebra ist symmetrisch bzgl. $\wedge/\vee$ und $\top/\bot$.

$$
\begin{array}{ll}
(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) & (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \\
A \wedge B = B \wedge A & A \vee B = B \vee A \\
A \wedge A = A & A \vee A = A \\
A \wedge \top = A & A \vee \bot = A \\
A \wedge \neg A = \bot & A \vee \neg A = \top \\
A \wedge (A \vee B) = A & A \vee (A \wedge B) = A \\
A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)
\end{array}
$$

Duale Funktionen

Zwei n-stellige Funktionen f und g heißen dual zueinander, wenn gilt: $\text{not}\, f(x_1, \ldots, x_n) = g(\text{not}\, x_1, \ldots, \text{not}\, x_n)$.

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit jeder der folgenden:

$$\begin{aligned} \text{not}\, f(\text{not}\, x_1, \ldots, \text{not}\, x_n) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n) &= \text{not}\, g(\text{not}\, x_1, \ldots, \text{not}\, x_n) \\ f(\text{not}\, x_1, \ldots, \text{not}\, x_n) &= \text{not}\, g(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

„and“ und „or“ sind dual, da $\text{not}(x \text{ and } y) = (\text{not}\, x) \text{ or } (\text{not}\, y)$ gilt.

Duale Operatoren

Zwei Operatoren heißen dual, wenn die zugehörigen Funktionen dual sind.

true / $\top$	not / $\neg$	and / $\wedge$	nand / $\uparrow$	iff / $\equiv$	implies / $\supset$	if / $\subset$
			ist dual zu			
false / $\bot$	not / $\neg$	or / $\vee$	nor / $\downarrow$	xor / $\not\equiv$	— / $\not\subset$	— / $\not\supset$

(und umgekehrt).

$G[A_1, \ldots, A_n]$ ... „Formel G enthält die Variablen A_1, ..., A_n“
$G[H_1, \ldots, H_n]$ ... Formel, die aus $G[A_1, \ldots, A_n]$ entsteht,
wenn A_i überall durch H_i ersetzt wird.

Duale Formeln

Zwei Formeln $F[A_1, \ldots, A_n]$ und $G[A_1, \ldots, A_n]$ heißen dual zueinander, wenn gilt: $\neg F[A_1, \ldots, A_n] = G[\neg A_1, \ldots, \neg A_n]$

$\neg F[\neg A_1, \ldots, \neg A_n]$ ist dual zu $F[A_1, \ldots, A_n]$.

$\neg((\neg A \vee \neg\neg B) \supset \neg A)$ ist dual zu $(A \vee \neg B) \supset A$.

Sei G die Formel, die aus F durch Ersetzen aller Operatoren durch ihre dualen hervorgeht. Dann ist G dual zu F.

$\neg(((A \wedge B) \not\equiv \neg(B \uparrow C)) \not\supset ((A \wedge \top) \vee B))$ ist dual zu
$\neg(((A \vee B) \equiv \neg(B \downarrow C)) \subset ((A \vee \bot) \wedge B))$

F^*, G^* ... irgendwelche dualen Formeln zu F bzw. G

$F = G$ gilt genau dann, wenn $F^* = G^*$ gilt.

$F = G$	$F^* = G^*$
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$
$A \wedge \top = A$	$A \vee \bot = A$
$A \wedge \neg A = \bot$	$A \vee \neg A = \top$
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- $(F^*)^* = F$
- F ist gültig genau dann, wenn F^* unerfüllbar ist.
- $F \supset G$ ist gültig genau dann, wenn $G^* \supset F^*$ gültig ist.
- ...

Dualität ist nicht dasselbe wie Negation!

Inhalt

Gone Maggie gone

„The Simpsons“, Staffel 20, Folge 13

The Simpsons – aussagenlogische Modellierung

If all you have is a hammer, everything looks like a nail.

$$\left.\begin{array}{ll} M_i & \dots\ \text{Maggie} \\ K_i & \dots\ \text{Knecht Ruprecht} \\ G_i & \dots\ \text{Gift} \\ H_i & \dots\ \text{Homer} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dots\ \text{befindet sich zum Zeitpunkt } i \\ \text{auf der anderen Seite des Flusses.} \end{array}$$

- Zum Zeitpunkt i befinden sich alle auf dieser Flussseite.

$$\text{AlleHier}(i) := \neg M_i \wedge \neg K_i \wedge \neg G_i \wedge \neg H_i$$

- Zum Zeitpunkt i befinden sind alle auf der anderen Flussseite.

$$\text{AlleDort}(i) := M_i \wedge K_i \wedge G_i \wedge H_i$$

- Wenn sich Maggie und KR oder Maggie und das Gift am selben Flussufer befinden, muss Homer bei Maggie sein.

$$\text{Sicher}(i) := ((M_i \equiv K_i) \vee (M_i \equiv G_i)) \supset (M_i \equiv H_i)$$

$$\left.\begin{array}{ll} MH_i \ldots & \text{Maggie} \\ KH_i \ldots & \text{Knecht Ruprecht} \\ GH_i \ldots & \text{Gift} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots \text{ fährt mit Homer über den Fluss} \\ \text{(zw. den Zeitpunkten } i-1 \text{ und } i\text{).} \end{array}$$

HH_i ... Homer fährt alleine über den Fluss (zwischen $i-1$ und i).

- Genau eine Überfahrt zwischen den Zeitpunkten $i-1$ und i.

Überfahrt(i) :=

$$(MH_i \wedge \neg KH_i \wedge \neg GH_i \wedge \neg HH_i) \vee (\neg MH_i \wedge KH_i \wedge \neg GH_i \wedge \neg HH_i) \vee$$
$$(\neg MH_i \wedge \neg KH_i \wedge GH_i \wedge \neg HH_i) \vee (\neg MH_i \wedge \neg KH_i \wedge \neg GH_i \wedge HH_i)$$

- Definition der Überfahrten:

DefÜberfahrt(i) :=

$$\begin{array}{l} \quad (MH_i \supset ((M_{i-1} \not\equiv M_i) \wedge (K_{i-1} \equiv K_i) \wedge (G_{i-1} \equiv G_i) \wedge (H_{i-1} \not\equiv H_i) \wedge (H_i \equiv M_i))) \\ \wedge\ (KH_i \supset ((M_{i-1} \equiv M_i) \wedge (K_{i-1} \not\equiv K_i) \wedge (G_{i-1} \equiv G_i) \wedge (H_{i-1} \not\equiv H_i) \wedge (H_i \equiv K_i))) \\ \wedge\ (GH_i \supset ((M_{i-1} \equiv M_i) \wedge (K_{i-1} \equiv K_i) \wedge (G_{i-1} \not\equiv G_i) \wedge (H_{i-1} \not\equiv H_i) \wedge (H_i \equiv G_i))) \\ \wedge\ (HH_i \supset ((M_{i-1} \equiv M_i) \wedge (K_{i-1} \equiv K_i) \wedge (G_{i-1} \equiv G_i) \wedge (H_{i-1} \not\equiv H_i)) \end{array}$$

Gesamtformel: Nach n Überfahrten sollen alle auf der anderen Seite sein.

$$\text{Simpsons}(n) := \text{AlleHier}(0) \wedge \text{AlleDort}(n) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \text{Sicher}(i)$$
$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \text{Überfahrt}(i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \text{DefÜberfahrt}(i)$$

Methode zum Lösen des Rätsels:

1. Errate die benötigte Zahl n der Überfahrten.
2. Finde eine erfüllende Interpretation für die Formel Simpsons(n) (z.B. mit Hilfe eines SAT-Solvers).

Eine mögliche Lösung:

$n = 7$,

$I(MH_1) = I(HH_2) = I(GH_3) = I(MH_4) = I(KH_5) = I(HH_6) = I(MH_7) = 1$

Gone Maggie gone (Fortsetzung)

„The Simpsons“, Staffel 20, Folge 13

Vor- und Nachteile dieser aussagenlogischen Modellierung

Vorteile:

- deklarativ-statisch, nicht prozedural-dynamisch
  Welche Eigenschaften sollen gelten?
  Nicht: Welche Schritte sind für Lösung erforderlich?
- modular
  Neue Bedingungen werden durch zusätzliche Formeln berücksichtigt.

Nachteile:

- Erraten von Parametern
  n muss durch Probieren gefunden werden
- Große Zahl an Variablen und Formeln
  Dynamik muss durch indizierte Variablen simuliert werden.
- Frame Problem
  Bei jeder Aktion muss auch definiert werden, was sich nicht ändert.
- unintuitiv
  Bei der Modellierung von Abläufen denkt man an Zustände und Übergänge, nicht an statische Bedingungen.