

St. Pölten, Oktober 03

# Aspekte der konstruktiven Mathematik

**Chris Fermüller**

<http://www.logic.at/staff/chrisf/>

**Technische Universität Wien**

**Institut für Computersprachen**

**AG Logik und Theoretische Informatik**

# Motivation

- ◇ Konstruktive Mathematik ist eine *eigene, alternative Art* Mathematik zu betreiben.  
(Mathematikdidaktiker sollten mit *unterschiedlichen* Sichtweisen der Mathematik vertraut sein.)
- ◇ Konstruktive Mathematik orientiert sich an *elementaren*, (auch historisch) *ersten Zugängen* zur Mathematik.
- ◇ Zum *Verständnis* des ‘*Grundlagenstreits*’ ist ein Verständnis der konstruktiven Mathematik unumgänglich

# Überblick

- ◇ Was heißt ‘konstruktiv’? (In der Mathematik)
- ◇ Einfache Beispiele (natürliche und reelle Zahlen)
- ◇ ‘Starke und schwache Gegenbeispiele’
- ◇ Die konstruktive Logik (intuitionistische Logik)
- ◇ Elemente konstruktiver Analysis
- ◇ Schulen der konstruktiven Mathematik
- ◇ Pro und kontra Konstruktivismus
- ◇ (*Ein aktuelles ‘Zuckerl’ zum Abschluss ...*)

## Was heißt 'konstruktiv'?

Im Detail, aber auch in der philosophischen Grundlegung verschiedener 'Schulen' des Konstruktivismus *unterscheiden* sich einschlägige Antworten oft sehr deutlich.

(Das hat auch *mathematische* Unterschiede zur Folge!)

Konstruktivismus rückt *Rechnen* und *Beweisen* in den Mittelpunkt mathematischen Denkens.

Zwei eng verbundene Grundmerkmale:

**(EE)** Jeder Beweis einer Existenzbehauptung ( $\exists x A(x)$ ) muss die *Konstruktion* eines Zeugen (für  $A$ ) beinhalten

**(DE)** Jeder Beweis einer Disjunktion ( $A \vee B$ ) muss einen Beweis für einen der beiden Disjunkte ( $A$  oder  $B$ ) enthalten

## Konstruktive Existenz und Disjunktion

- ◇ (EE) und (DE) können als zwei Formen des selben Prinzips verstanden werden:

$$\exists n A(n) \approx A(0) \vee A(1) \vee A(2) \vee \dots$$

$$B \vee C \approx \exists n (n = 0 \rightarrow B) \wedge (n \neq 0 \rightarrow C)$$

- ◇ Gültigkeit des Prinzips im Kontext:

$\forall x \exists y A(x, y)$  zu beweisen, bedeutet einen *Algorithmus*  $K$  anzugeben der zu jedem gegebenen  $x$  ein  $y = K(x)$  konstruiert, sodass  $A(x, K(x))$  nachgewiesen werden kann.

Analog für  $\forall x (A \vee B)$ .

*Nota bene:*

Wir sprechen von ‘*Nachweis* (*Beweis*)’ und ‘*Algorithmus*’ wo ‘*klassische*’ Mathematiker oft von ‘*Gültigkeit*’ bzw. ‘*Funktion*’ sprechen.

## Ein berühmtes Beispiel

### Behauptung.

Es gibt irrationale Zahlen  $a, b$  derart, dass  $a^b$  rational ist.

### Beweis:

Entweder  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  ist rational (und somit  $a = b = \sqrt{2}$ ) oder

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

(und daher  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ ). Qed.

## Ein einfaches (positives) Beispiel

**Satz.** Es gibt unbeschränkt viele Primzahlen.

**Beweis:**

z.z. ist  $\forall n \exists p : p > n \wedge \text{prim}(p)$ .

Es seien  $p_1, \dots, p_k$  alle Primzahlen  $\leq n$ :

Man bilde  $q = (p_1 \cdot \dots \cdot p_k) + 1$

Entweder  $q$  selbst oder ein beliebiger Primteiler von  $q$  ist das gesuchte  $p$ .

*Anmerkung:*

Der Beweis ist (erst) als konstruktiv zu betrachten, wenn man einen effektiven Primzahltest und einen Algorithmus zur Bestimmung der Primteiler voraussetzt.

## Primzahlen – inkonstruktiv:

**Satz.** Die Menge  $\mathbb{P}$  aller Primzahlen ist unendlich.

### Beweis (‘topologisch’):

Die arithmetischen Folgen bilden eine Basis für eine Topologie auf  $\mathbb{Z}$ . Genauer:

Es sei

$$N_{a,b} = \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}$$

*Def.*  $O \subseteq \mathbb{Z}$  heißt *offen*, wenn  $O$  als (eventuell leere) Vereinigung arithmetischer Reihen dargestellt werden kann.

Beobachtung:

Die offenen Mengen sind unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

$(N_{a,b_1} \subseteq O_1$  und  $N_{a,b_2} \subseteq O_2$  impliziert  $a \in N_{a,b_1b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$ .)

M.a.W.: wir haben tatsächlich eine Topologie auf  $\mathbb{Z}$  erklärt.

Fakten:

(A) Jede nicht-leere offene Menge ist unendlich.

$$(B) \quad N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$$

M.a.W.: Die Mengen  $N_{a,b}$  sind (auch) *geschlossen*.

Alle ganze Zahlen außer 1 und  $-1$  haben Primteiler. Daher:

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

Wäre nun  $\mathbb{P}$  endlich, dann wäre  $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$  – wegen (B) – eine endliche Vereinigung geschlossener Mengen und somit selbst geschlossen.

Das würde aber die Offenheit von  $\{1, -1\}$  implizieren.

Widerspruch zu (A) zeigt q.e.d.

## **Nicht-konstruktive Elemente im 'topologischen Beweis':**

- ◇ Indirekter Beweis  
(‘... aus dem Widerspruch folgt q.e.d.’)
- ◇ Quantifikation über beliebige Teilmengen ganzer Zahlen
- ◇ Beliebige Vereinigungen von Mengen
- ◇ Komplementbildung  
(ist o.k., sofern die Entscheidbarkeit der Mengen  
nachgewiesen wird)

# Reelle Zahlen

*Grundsatzfrage:*

Was bedeutet es eine reelle Zahl ‘anzugeben’?

*Antwort:*

Reelle Zahlen  $r$  werden mittels *Zahlengeneratoren* spezifiziert.

**Definition.**

Ein Zahlengenerator ist eine *effektive* Folge  $\langle r_n \rangle$  von rationalen Zahlen, sodass

$$\forall k \exists n \forall m > n : |r_m - r_n| < 2^{-k}$$

*Bemerkung:* Alternative Definition wie

$$\begin{aligned} r_n &= X.z_1 z_2 \dots z_n \\ r_{n+1} &= X.z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} \quad (\text{Dezimalnotation}) \end{aligned}$$

erfüllen (beweisbar!) den selben Zweck.

## Gleichheit und Ordnung in $\mathfrak{R}$

**Def.**  $x =_{\mathfrak{R}} y \iff \forall k \exists m \forall n > m : |x_n - y_n| < 2^{-k}$ .

*Übungsaufgabe:*

- (a)  $=_{\mathfrak{R}}$  ist eine Äquivalenzrelation
- (b) übliche arithmetische Operationen sind definierbar.
- (c)  $e, \pi, e^e, \log 2$  etc. sind 'konstruktiv' reelle Zahlen.

**Konvention.** Wir schreiben  $x = y$  [  $x \neq y$  ] statt  $x =_{\mathfrak{R}} y$  [  $\neg(x =_{\mathfrak{R}} y)$  ]

**Def.**  $x < y \iff \exists k, m \forall n > m : (y_n - x_n) > 2^{-k}$ .

$$x \leq y \iff \neg y < x .$$

*Bemerkung:*

$x \leq y$  ist eine *negative* Eigenschaft, die (konstruktiv) echt schwächer ist als die *positive* Eigenschaft  $x < y \vee x = y$  !

*Übungsaufgabe:*

Zeige  $x < y \vee x = y$  impliziert  $x \leq y$ , aber nicht umgekehrt.

**Def.**  $x \# y \iff \exists k \exists m \forall n > m : |x_n - y_n| > 2^{-k}$ .

*Bemerkung:*

$\#$  ('Verschiedenheit') ist ein stärkere Relation als  $\neq$  ('Ungleichheit')!

Es lässt sich zeigen (*Übungsaufgaben*):

- ◇  $x \# y \leftrightarrow (x < y \vee y < x)$
- ◇  $x \# y \rightarrow x \neq y$
- ◇  $(x = y \wedge y \# z) \rightarrow x \# z$
- ◇  $\neg(x \# y) \rightarrow x = y$

Aber *nicht* beweisbar:

- ◇  $x \neq y \rightarrow x \# y$
- ◇  $x < y \vee x = y \vee y < x$  ('Trichotomie')

## Methode der 'schwachen Gegenbeispiele'

$G(n)$  ...  $n = 0$  oder  $n = 1$  oder  $n$  ist arithmetisches Mittel zweier  
(nicht notwendigerweise verschiedener) Primzahlen

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } G(k) \text{ f\u00fcr alle } k \leq n \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k = \text{kleinste Zahl } \leq n, \text{ sodass } \neg G(k) \end{cases}$$

Offenbar w\u00fcrde ein konstruktiver Beweis von  $x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$  einen Beweis der Goldbach'schen Vermutung enthalten!

## 'Starke Gegenbeispiele'

$T(a, b, c)$  ... Programm Nummer  $a$  h\u00e4lt auf Input  $b$   
in maximal  $c$  Schritten

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \forall k < n : \neg T(a, b, k) \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k < n, \text{ minimal f\u00fcr } T(a, b, k) \end{cases}$$

$x = 0$  impliziert Programm  $a$  h\u00e4lt auf Input  $b$ .

Ein Beweis der Trichotomie w\u00fcrde das Halteproblem l\u00f6sen.

## Die Logik konstruktiver Beweise (BHK-Interpretation)

$\pi : A \dots$   $\pi$  ist ein Beweis von  $A$

$\pi : A \wedge B \iff \pi = \langle \pi_0, \pi_1 \rangle$  wobei  $\pi_0 : A$  und  $\pi_1 : B$

$\pi : A \vee B \iff \pi = \langle \nu, \tau \rangle$  wobei entweder  $\nu = 0$  und  $\tau : A$   
oder  $\nu = 1$  und  $\tau : B$

$\pi : A \rightarrow B \iff \pi$  ist eine Beweistransformation, die jeden  
Beweis von  $A$  in einen Beweis von  $B$  überführt

$\pi : \exists x \in X A(x) \iff \pi = \langle \rho, \tau_0 \rangle$  wobei  $\rho : n \in X$  und  $\tau_0 : A(n)$

$\pi : \forall x \in X A(x) \iff \pi$  transformiert jeden Beweis von  $n \in X$   
in einen Beweis von  $A(n)$

$\neg A$  ist eine Abkürzung für  $A \rightarrow 0 = 1$ .

Aus der Definition folgt:

Es gibt kein universales Beweisschema für  $A \vee \neg A!$

*Schwaches Gegenbeispiel:*  $A =$  Goldbach'sche Vermutung.

Brouwer spricht von der 'Unzuverlässigkeit' des Tertium-non-datur.

$\implies$  Systeme für intuitionistische Logik

*Nota bene:*

Brouwer folgend haben wir nicht die Mathematik über einer gegebenen Logik aufgebaut, sondern – umgekehrt – die (intuitionistische) Logik aus der (konstruktiven) Mathematik abgeleitet!

## Elemente konstruktiver ('intuitionistischer') Logik

Folgende Formeln sind gültig:

- ◇  $A \rightarrow \neg\neg A$
- ◇  $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- ◇  $\exists x\neg A(x) \rightarrow \neg\forall xA(x)$
- ◇  $A \wedge (B \vee C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- ◇  $((A \wedge B) \vee (A \vee C)) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$

Folgende Formeln sind intuitionistisch ungültig:

- ◇  $\neg\neg A \rightarrow A$
- ◇  $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$
- ◇  $\neg\forall xA(x) \rightarrow \exists x\neg A(x)$

Analog zu bekannten (Hilbert-Frege-Typ)-Systemen der klassischen Logik, lässt sich die intuitionistische Logik als Axiomensystem mit

$$\text{Modus Ponens: } \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

und

$$\text{Generalisierung: } \frac{A(x)}{\forall x A(x)}$$

kalkülisieren.

Wichtiger für die Beweistheorie sind:

- ◊ Gentzen's Sequentialkalkül (LJ vs. LK)
- ◊ Kalkül des 'natürlichen Schließens'

## **Klassische (Meta-)theorie der intuitionistische Logik**

Typische Vollständigkeitssätze ‘allá Tarski’ (für unterschiedlichste Logiken) sind wesentlich nicht-konstruktiv.

### **Aber:**

Verschiedene klassische Semantiken für die intuitionistische Logik:

- ◇ Kripke-Beth Modelle
- ◇ Topologische Interpretation
- ◇ algebraische Modelle

Näher der ‘intendierten Semantik’:

- ◇ ‘Curry-Howard-Isomorphismus’  
(Beweise als  $\lambda$ -Terme – Formeln als Typen)

# Elemente einer konstruktiven Analysis

## Generelle Merkmale

- ◇ Der (historisch) originale Begriff der *Funktion* als ‘*regelmäßige Zuordnung*’ wird rehabilitiert
- ◇ Konstruktivismus erlaubt feinere Unterscheidungen:  
 $\neg \forall n A(n)$  nicht äquivalent zu  $\exists n \neg A(n)$ , etc.
- ◇ Viele klassische Konzepte werden konstruktiv sinnlos
- ◇ Beweise meist aufwändiger, aber ‘informativer’
- ◇ Konstruktive Präsentation klassischer Gebiete der Analysis (Differential- und Integralrechnung allá 18./19. Jahrhundert)  
ist oft adäquater als ‘klassische’ Mathematik (allá ‘in  $ZF(C)$ ’)

## Satz vom Maximum

**Satz** (klassisch):

Jede gleichmäßig stetige Funktion  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  nimmt in einem Punkt  $x$  ihr Maximum an.

Dies ist konstruktiv unachweisbar.

(schwache bzw. starke) **Gegenbeispiele:**

$f$  läßt sich so definieren, dass  $f(\frac{1}{3}) = 1$  und  $f(\frac{2}{3}) = 1 + t$ ,  
wobei wir  $t \leq 0 \vee t \geq 0$  nicht nachweisen können.

Allerdings läßt sich der Maximalwert selbst konstruktiv angeben.

( $\delta$ -Raster  $\implies \delta(\epsilon)$  Konvergenzrate)

## Mittelwertsätze

**Satz (klassisch).** Jede gleichmäßig stetige Funktion  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  mit  $f(0) = -1$  und  $f(1) = 1$  hat eine Nullstelle.

( $\forall f[..\ ]\exists x(f(x) = 0)$ .)

Wiederum lassen sich **Gegenbeispiele** zur konstruktiven Gültigkeit angeben.

**Aber:**

$\forall f[..\ ]\forall \varepsilon \exists x(|f(x)| < \varepsilon)$  gilt konstruktiv.

Ebenso:

$\forall f(\alpha(f) \rightarrow \exists x(f(x) = 0))$ , wobei

$\alpha(f) := \forall b \forall a < b \exists c(a < c < b \wedge f(c) \neq 0)$

Insbesondere gilt der Mittelwertsatz für (konstruktiv) analytische Funktionen.

## 'Konstruktivisierung' klassischer Sätze

Es besteht oft die Wahl zwischen 'equal-hypothesis'-Substitut und 'equal-conclusion'-Substitut.

Allgemeine Richtlinien:

- ◇ Begriff nach Möglichkeit **positiv** ausdrücken:  
Z.B.  $x \neq 0$  vs.  $x \neq 0$ . Auch: 'nicht-leer' vs. 'inhabited'
- ◇ Nur **relevante** Definitionen benutzen:  
gleichmäßige vs. punktweise Stetigkeit
- ◇ Beweise durch Formulierung (adäquater) starker Hypothesen vereinfachen:  
Z.B. Wenn wir einen Raum konstruktiv mit einer Topologie versehen induziert dies meist bereits eine Metrik. Daher ist die 'Spezialisierung' auf metrische Räume meist adäquat.

*Bishop*: Pseudoallgemeinheit vermeiden.

## **Bereich der konstruktiven Mathematik**

Nahezu alle klassischen Gebiete der Mathematik haben  
(mittlerweile) auch ein konstruktives Pendant:

- ◇ Differentialgleichungen
- ◇ Potentialtheorie
- ◇ Topologie
- ◇ Variationsrechnung
- ◇ Lineare Algebra
- ◇ Gruppen, Ringe, Körper, ...
- ◇ ...

## Schulen der Konstruktiven Mathematik

- ◇ Russischer Konstruktivismus (Markov-Schule)
- ◇ Rekursive Analysis
- ◇ (Brouwer'scher) Intuitionismus
- ◇ Bishop's Konstruktivismus
- ◇ Martin-Löf'sche Typentheorie
- ◇ ...

Die einzelnen Auffassung führen zu *unterschiedlichen mathematischen Ergebnissen* und sind *nicht* nach dem Schema 'stärkere/schwächere Annahmen' vergleichbar!

## Die Church-Turing-These (CTT)

**Klassische Formulierung:** Jeder Algorithmus kann als rekursive Funktion (bzw. Turingmaschinenprogramm) dargestellt werden.

Im Gegensatz zur klassischen Mathematik kann man verschiedene Varianten von **CTT** *innerhalb* der konstruktiven Mathematik ausdrücken:

**CT:**  $\forall \alpha \exists e \forall n (\{e\}(n) = \alpha(n))$

$\alpha$  läuft über alle ‘regelhaften Folgen’ (‘lawlike sequences’)

**FCT:** Wie **CT** jedoch mit Brouwer’schen ‘Wahlfolgen’ statt ‘regelhaften Folgen’

**WCT:**  $\forall \alpha \neg \exists e \forall n (\{e\}(n) = \alpha(n))$

‘Es gibt keine nicht-rekursiven Folgen’

## Russischer Konstruktivismus (Markov-Schule)

- ◇ Geht auf A.A. Markov (jr., 1903-1979) zurück
- ◇ ‘Konstruktionen’ werden mit Markov-Algorithmen identifiziert. Markov-Algorithmen bilden ein universelles Berechnungsmodell (äquivalent zu Turingmaschinen, partiell rekursiv etc.)

- ◇ Besonderes Axiomenschema (Markov’s Schema) (**MP**):

$$(\forall n[A(n) \vee \neg A(n)] \wedge \neg \neg \exists x A(x)) \rightarrow \exists x A(x)$$

äquivalent zu  $\forall x \in \mathfrak{R} : \neg x \leq 0 \rightarrow x > 0$

- ◇ Abgesehen von (**MP**) gilt intuitionistische Logik

## Rekursive Analysis

- ◇ (Wie in der Markov-Schule:) (**CTT**) wird vorausgesetzt, konstruktiv wird mit ‘rekursiv’ identifiziert
- ◇ (Aber:) klassische Logik als Basislogik
- ◇ Alle Sätze werden (klassisch äquivalent) so umformuliert, dass ‘ $\forall x \exists y A(x, y)$ ’ jeweils durch ‘ $\exists f \forall x A(x, f(x))$ ’ ersetzt ist
- ◇ enge Beziehung zum russischen Konstruktivismus: ‘rekursifizierte’ Versionen sind (i.a.) klassisch beweisbar g.d.w. auch in intuitionistischer Logik + (**MP**) beweisbar

## Intuitionismus

- ◇ L(uitzen) E(gbertus) J(an) Brouwer (1881-1966),  
Gegnerschaft zu Hilbert (komplexe Geschichte: Hilbert bot Brouwer 1919 einen Lehrstuhl in Göttingen an)
- ◇ Brouwer's Theorie des Kontinuums (*Wahlfolgen*, *Fan-Theorem*, *Bar-Induktion* etc.) ist nicht nur von klassischer Mathematik, sondern auch von anderen Schulen des Konstruktivismus weit entfernt
- ◇ Mathematik bestimmt Logik, nicht umgekehrt
- ◇ Ausgeprägte, oft 'schwer verdauliche' philosophische Fundierung (zentral: 'Das kreative Subjekt')

## **Bishop's Konstruktivismus**

- ◇ Errett Bishop (1928-1983)
  - ‘Foundations of Constructive Analysis’ (1967) – schulbildend
  - ◇ Jedes Theorem soll einen numerischen Gehalt haben
  - ◇ Keine Identifikation von ‘regelmäßig’ und ‘rekursiv’ (aber auch keine nicht-rekursiven Regeln)
  - ◇ Verschiedene Interpretationsmöglichkeiten:
    - Beeson über Bishop:
      - ‘Classical mathematician, Russian constructivist, intuitionist – everyone will read the mathematics slightly differently, but everyone will accept it’
  - ◇ Keine ausgeprägte philosophische Basis

## **Bemerkungen zum Auswahlaxiom**

*Hintergrund:*

‘Glaube’ an das Auswahlaxiom scheint (historisch) oft Platonisten von Mathematikern mit ‘vorsichtigeren’ Grundlagenhaltungen zu trennen.

**Fakt:**

Die Gültigkeit des Auswahlaxioms folgt aus der BHK-Interpretation der intuitionistischen Logik.

*Allerdings:*

Nur bestimmte ‘konstruktive Mengenlehren’ validieren das Auswahlaxiom.

Klassische Formulierungen sind natürlich inkonstruktiv.

## **Bemerkungen zum Auswahlaxiom**

*Hintergrund:*

‘Glaube’ an das Auswahlaxiom scheint (historisch) oft Platonisten von Mathematikern mit ‘vorsichtigeren’ Grundlagenhaltungen zu trennen.

**Fakt:**

Die Gültigkeit des Auswahlaxioms folgt aus der BHK-Interpretation der intuitionistischen Logik.

*Allerdings:*

Nur bestimmte ‘konstruktive Mengenlehren’ validieren das Auswahlaxiom.

Klassische Formulierungen sind natürlich inkonstruktiv.

## Kritik am Konstruktivismus

- ◇ Hilbert: 'Boxen mit an den Rücken gebundener Hand'  
'Vertreibung aus dem Cantorsche Paradies'
- ◇ Gefährdete 'Einheit der Mathematik'
- ◇ Beweise oft langwieriger, weniger elegant
- ◇ Mangel an Relevanz für konkrete algorithmische Probleme  
(‘Computeralgebra’ ist klassische Mathematik!)

## Verteidigung des Konstruktivismus

- ◇ überzeugende philosophische Basis (Brouwer, Weyl, ...)
- ◇ kritisierte ‘Mängel’ haben auch soziologische Gründe:
  - vergleichsweise wenig konstruktive Mathematiker
  - (contra Intuitionismus:) starker Wille zur ‘Einheit der Mathematik’
- ◇ die ‘Ideologie’ des Konstruktivismus generiert neue Problemstellungen und Perspektiven (siehe z.B. M. Frank)
- ◇ Manche Resultate von Konstruktivisten repräsentieren auch aus klassischer Sicht überzeugenden Fortschritt  
(Bishop: Ergodentheorie, Beeson: ‘*On the area of harmonic surfaces*’, Seedorf ‘*Diagonalization of Continuous Matrices*’)

## Konstruktive Existenz klassisch?!

Intuitionistische Logik erfüllt das konstruktive Existenzprinzip:

**(EE')**  $T \vdash \exists x A(x)$  impliziert  $T \vdash A(t)$

für einen geschlossenen Term  $t$  der offenen Theorie  $T$

Im allgemeinen ist **(EE')** klassisch falsch:

*vide*  $P(0) \vee P(1) \vdash \exists x P(x)$

*Nota Bene:* Es ist algorithmisch unentscheidbar ob **(EE')** für gegebene  $T$  und  $A$  klassisch gilt!

Kann man charakterisieren unter welchen Umständen **(EE')** klassisch gilt?

**Satz** (Baaz/F, *LPAR 2003*)

$T \vdash A(t)$  für einen geschlossenen Term  $t$  genau dann, wenn

$\Gamma(T) \vdash \Gamma(\exists x A(x))$  für eine bestimmte, einfache Sprachtransformation  $\Gamma$ .

## Zusammenfassend

- ◇ Konstruktive Mathematik besteht in einer *bestimmten Art* Mathematik zu betreiben
- ◇ Konstruktive Mathematik ist kein monolithischer Block, sondern ist in (oft sehr unterschiedlichen) ‘Schulen’ ausgeprägt
- ◇ ‘naiver Konstruktivismus’ bzw. auch ‘Computermathematik’ sind von Intuitionismus / russischem Konstruktivismus / rekursiver Analysis / Bishop’s Konstruktivismus ... sehr weit entfernt
- ◇ Konstruktive Mathematik ist auch heute noch ein aktiver Forschungszweig mit vielen Aspekten