

Aspekte der konstruktiven Mathematik

Chris Fermüller

<http://www.logic.at/staff/christf/>

Technische Universität Wien

Institut für Computersprachen

AG Logik und Theoretische Informatik

1

Überblick

- ◇ Was heißt 'konstruktiv'? (In der Mathematik)
- ◇ Einfache Beispiele (natürliche und reelle Zahlen)
- ◇ 'Starke und schwache Gegenbeispiele'
- ◇ Die konstruktive Logik (intuitionistische Logik)
- ◇ Elemente konstruktiver Analysis
- ◇ Schulen der konstruktiven Mathematik
- ◇ Pro und kontra Konstruktivismus
- ◇ (*Ein aktuelles 'Zuckerl' zum Abschluss ...*)

3

Motivation

- ◇ Konstruktive Mathematik ist eine *eigene, alternative Art* Mathematik zu betreiben.
(Mathematikdidaktiker sollten mit *unterschiedlichen* Sichtweisen der Mathematik vertraut sein.)
- ◇ Konstruktive Mathematik orientiert sich an *elementaren*, (auch historisch) *ersten Zugängen* zur Mathematik.
- ◇ Zum *Verständnis* des 'Grundlagenstreits' ist ein Verständnis der konstruktiven Mathematik unumgänglich

2

Was heißt 'konstruktiv'?

Im Detail, aber auch in der philosophischen Grundlegung verschiedener 'Schulen' des Konstruktivismus *unterscheiden* sich einschlägige Antworten oft sehr deutlich.

(Das hat auch *mathematische* Unterschiede zur Folge!)

Konstruktivismus rückt *Rechnen* und *Beweisen* in den Mittelpunkt mathematischen Denkens.

Zwei eng verbundene Grundmerkmale:

(E) Jeder Beweis einer Existenzbehauptung ($\exists x A(x)$) muss die *Konstruktion* eines Zeugen (für A) beinhalten

(D) Jeder Beweis einer Disjunktion ($A \vee B$) muss einen Beweis für einen der beiden Disjunkte (A oder B) enthalten

4

Konstruktive Existenz und Disjunktion

◊ (E) und (DE) können als zwei Formen des selben Prinzips verstanden werden:

$$\exists n A(n) \approx A(0) \vee A(1) \vee A(2) \vee \dots$$

$$B \vee C \approx \exists n (n = 0 \rightarrow B) \wedge (n \neq 0 \rightarrow C)$$

◊ Gültigkeit des Prinzips im Kontext:

$\forall x \exists y A(x, y)$ zu beweisen, bedeutet einen *Algorithmus* K

anzugeben der zu jedem gegebenen x ein $y = K(x)$ konstruiert, sodass $A(x, K(x))$ nachgewiesen werden kann.

Analog für $\forall x (A \vee B)$.

Nota bene:

Wir sprechen von 'Nachweis (Beweis)' und 'Algorithmus'

wo 'klassische' Mathematiker oft von 'Gültigkeit' bzw. 'Funktion' sprechen.

5

Ein einfaches (positives) Beispiel

Satz. Es gibt unbeschränkt viele Primzahlen.

Beweis:

z.z. ist $\forall n \exists p : p > n \wedge \text{prim}(p)$.

Es seien p_1, \dots, p_k alle Primzahlen $\leq n$:

Man bilde $q = (p_1 \cdot \dots \cdot p_k) + 1$

Entweder q selbst oder ein beliebiger Primteiler von q ist das gesuchte p .

Anmerkung:

Der Beweis ist (erst) als konstruktiv zu betrachten, wenn man einen effektiven Primzahltest und einen Algorithmus zur Bestimmung der Primteiler voraussetzt.

7

Ein berühmtes Beispiel

Behauptung.

Es gibt irrationale Zahlen a, b derart, dass a^b rational ist.

Beweis:

Entweder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational (und somit $a = b = \sqrt{2}$) oder

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

(und daher $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$). Qed.

6

Primzahlen – inkonstruktiv:

Satz. Die Menge \mathbb{P} aller Primzahlen ist unendlich.

Beweis ('topologisch'):

Die arithmetischen Folgen bilden eine Basis für eine Topologie auf \mathbb{Z} . Genauer:

Es sei

$$N_{a,b} = \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}$$

Def. $O \subseteq \mathbb{Z}$ heißt *offen*, wenn O als (eventuell leere) Vereinigung arithmetischer Reihen dargestellt werden kann.

Beobachtung:

Die offenen Mengen sind unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

$(N_{a,b_1} \subseteq O_1$ und $N_{a,b_2} \subseteq O_2$ impliziert $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$.)

M.a.W.: wir haben tatsächlich eine Topologie auf \mathbb{Z} erklärt.

8

Fakten:

(A) Jede nicht-leere offene Menge ist unendlich.

$$(B) \quad N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$$

M.a.W.: Die Mengen $N_{a,b}$ sind (auch) *geschlossen*.

Alle ganze Zahlen außer 1 und -1 haben Primteiler. Daher:

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

Wäre nun \mathbb{P} endlich, dann wäre $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ – wegen (B) – eine endliche Vereinigung geschlossener Mengen und somit selbst geschlossen.

Das würde aber die Offenheit von $\{1, -1\}$ implizieren. Widerspruch zu (A) zeigt q.e.d.

9

Reelle Zahlen

Grundsatzfrage:

Was bedeutet es eine reelle Zahl ‘anzugeben’?

Antwort:

Reelle Zahlen r werden mittels *Zahlengeneratoren* spezifiziert.

Definition.

Ein Zahlengenerator ist eine *effektive* Folge $\langle r_n \rangle$ von rationalen Zahlen, sodass

$$\forall k \exists n \forall m > n : |r_m - r_n| < 2^{-k}$$

Bemerkung: Alternative Definition wie

$$\begin{aligned} r_n &= X.z_1 z_2 \dots z_n \\ r_{n+1} &= X.z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{Dezimalnotation})$$

erfüllen (beweisbar!) den selben Zweck.

11

Nicht-konstruktive Elemente im ‘topologischen Beweis’:

- ◊ Indirekter Beweis
(‘... aus dem Widerspruch folgt q.e.d.’)
- ◊ Quantifikation über beliebige Teilmengen ganzer Zahlen
- ◊ Beliebige Vereinigungen von Mengen
- ◊ Komplementbildung
(ist o.k., sofern die Entscheidbarkeit der Mengen nachgewiesen wird)

10

Gleichheit und Ordnung in \mathbb{R}

Def. $x =_{\mathbb{R}} y \iff \forall k \exists m \forall n > m : |x_n - y_n| < 2^{-k}$.

Übungsaufgabe:

(a) $=_{\mathbb{R}}$ ist eine Äquivalenzrelation

(b) übliche arithmetische Operationen sind definierbar.

(c) $e, \pi, e^e, \log 2$ etc. sind ‘konstruktiv’ reelle Zahlen.

Konvention. Wir schreiben $x = y$ [$x \neq y$] statt $x =_{\mathbb{R}} y$ [$\neg(x =_{\mathbb{R}} y)$]

Def. $x < y \iff \exists k, m \forall n > m : (y_n - x_n) > 2^{-k}$.

$$x \leq y \iff \neg y < x.$$

Bemerkung:

$x \leq y$ ist eine *negative* Eigenschaft, die (konstruktiv) echt schwächer ist als die *positive* Eigenschaft $x < y \vee x = y$!

Übungsaufgabe:

Zeige $x < y \vee x = y$ impliziert $x \leq y$, aber nicht umgekehrt.

12

Def. $x \# y \iff \exists k \exists m \forall n > m : |x_n - y_n| > 2^{-k}$.

Bemerkung:

$\#$ ('Verschiedenheit') ist ein stärkere Relation als \neq ('Ungleichheit')!

Es lässt sich zeigen (Übungsaufgaben):

- $\diamond x \# y \leftrightarrow (x < y \vee y < x)$
- $\diamond x \# y \rightarrow x \neq y$
- $\diamond (x = y \wedge y \# z) \rightarrow x \# z$
- $\diamond \neg(x \# y) \rightarrow x = y$

Aber *nicht* beweisbar:

- $\diamond x \neq y \rightarrow x \# y$
- $\diamond x < y \vee x = y \vee y < x$ ('Trichotomie')

13

Die Logik konstruktiver Beweise (BHK-Interpretation)

$\pi : A \dots$ π ist ein Beweis von A

$\pi : A \wedge B \iff \pi = \langle \pi_0, \pi_1 \rangle$ wobei $\pi_0 : A$ und $\pi_1 : B$

$\pi : A \vee B \iff \pi = \langle \nu, \pi \rangle$ wobei entweder $\nu = 0$ und $\pi : A$ oder $\nu = 1$ und $\pi : B$

$\pi : A \rightarrow B \iff \pi$ ist eine Beweisstransformation, die jeden Beweis von A in einen Beweis von B überführt

$\pi : \exists x \in X A(x) \iff \pi = \langle \rho, \pi_0 \rangle$ wobei $\rho : n \in X$ und $\pi_0 : A(n)$

$\pi : \forall x \in X A(x) \iff \pi$ transformiert jeden Beweis von $n \in X$ in einen Beweis von $A(n)$

$\neg A$ ist eine Abkürzung für $A \rightarrow 0 = 1$.

15

Methode der 'schwachen Gegenbeispiele'

$G(n) \dots$ $n = 0$ oder $n = 1$ oder n ist arithmetisches Mittel zweier (nicht notwendigerweise verschiedener) Primzahlen

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } G(k) \text{ für alle } k \leq n \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k = \text{kleinste Zahl } \leq n, \text{ sodass } \neg G(k) \end{cases}$$

Offenbar würde ein konstruktiver Beweis von $x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$ einen Beweis der Goldbach'schen Vermutung enthalten!

'Starke Gegenbeispiele'

$T(a, b, c) \dots$ Programm Nummer a hält auf Input b in maximal c Schritten

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \forall k < n : \neg T(a, b, k) \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k < n, \text{ minimal für } T(a, b, k) \end{cases}$$

$x = 0$ impliziert Programm a hält auf Input b .

Ein Beweis der Trichotomie würde das Halteproblem lösen.

14

Aus der Definition folgt:

Es gibt kein universales Beweisschema für $A \vee \neg A$!

Schwaches Gegenbeispiel: $A =$ Goldbach'sche Vermutung.

Brouwer spricht von der 'Unzuverlässigkeit' des Tertium-non-datur.

\implies Systeme für intuitionistische Logik

Nota bene:

Brouwer folgend haben wir nicht die Mathematik über einer gegebenen Logik aufgebaut, sondern – umgekehrt – die (intuitionistische) Logik aus der (konstruktiven) Mathematik abgeleitet!

16

Elemente konstruktiver ('intuitionistischer') Logik

Folgende Formeln sind gültig:

- ◇ $A \rightarrow \neg\neg A$
- ◇ $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- ◇ $\exists x\neg A(x) \rightarrow \neg\forall xA(x)$
- ◇ $A \wedge (B \vee C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- ◇ $((A \wedge B) \vee (A \vee C)) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$

Folgende Formeln sind intuitionistisch ungültig:

- ◇ $\neg\neg A \rightarrow A$
- ◇ $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$
- ◇ $\neg\forall xA(x) \rightarrow \exists x\neg A(x)$

17

Klassische (Meta-)theorie der intuitionistische Logik

Typische Vollständigkeitssätze 'alla Tarski' (für unterschiedlichste Logiken) sind wesentlich nicht-konstruktiv.

Aber:

Verschiedene klassische Semantiken für die intuitionistische Logik:

- ◇ Kripke-Beth Modelle
- ◇ Topologische Interpretation
- ◇ algebraische Modelle

Näher der 'intendierten Semantik':

- ◇ 'Curry-Howard-Isomorphismus'
(Beweise als λ -Terme – Formeln als Typen)

19

Analog zu bekannten (Hilbert-Frege-Typ)-Systemen der klassischen Logik, lässt sich die intuitionistische Logik als Axiomensystem mit

$$\text{Modus Ponens: } \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

und

$$\text{Generalisierung: } \frac{A(x)}{\forall x A(x)}$$

kalkülisieren.

Wichtiger für die Beweistheorie sind:

- ◇ Gentzen's Sequentialkalkül (LJ vs. LK)
- ◇ Kalkül des 'natürlichen Schließens'

18

Elemente einer konstruktiven Analysis

Generelle Merkmale

- ◇ Der (historisch) originale Begriff der *Funktion* als 'regelhafte Zuordnung' wird rehabilitiert
- ◇ Konstruktivismus erlaubt feinere Unterscheidungen: $\neg\forall nA(n)$ nicht äquivalent zu $\exists n\neg A(n)$, etc.
- ◇ Viele klassische Konzepte werden konstruktiv sinnlos
- ◇ Beweise meist aufwändiger, aber 'informativer'
- ◇ Konstruktive Präsentation klassischer Gebiete der Analysis (Differential- und Integralrechnung alla 18./19. Jahrhundert) ist oft adäquater als 'klassische' Mathematik (alla 'in ZF(C)')

20

Satz vom Maximum

Satz (klassisch):

Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt in einem Punkt x ihr Maximum an.

Dies ist konstruktiv unmachbar.

(schwache bzw. starke) **Gegenbeispiele:**

f läßt sich so definieren, dass $f(\frac{1}{3}) = 1$ und $f(\frac{2}{3}) = 1 + t$, wobei wir $t \leq 0 \vee t \geq 0$ nicht nachweisen können.

Allerdings läßt sich der Maximalwert selbst konstruktiv angeben.

(δ -Raster $\implies \delta(\epsilon)$ Konvergenzrate)

21

'Konstruktivierung' klassischer Sätze

Es besteht oft die Wahl zwischen 'equal-hypothesis'-Substrut und 'equal-conclusion'-Substrut.

Allgemeine Richtlinien:

◇ Begriff nach Möglichkeit **positiv** ausdrücken:

Z.B. $x \neq 0$ vs. $x \neq 0$. Auch: 'nicht-leer' vs. 'inhabited'

◇ Nur **relevante** Definitionen benutzen:
gleichmäßige vs. punktweise Stetigkeit

◇ Beweise durch Formulierung (adäquater) starker Hypothesen vereinfachen:

Z.B. Wenn wir einen Raum konstruktiv mit einer Topologie versehen induziert dies meist bereits eine Metrik. Daher ist die 'Spezialisierung' auf metrische Räume meist adäquat.

Bishop: Pseudogemeinheit vermeiden.

23

Mittelwertsätze

Satz (klassisch). Jede gleichmäßige stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$ hat eine Nullstelle.

($\forall f[\dots] \exists x (f(x) = 0)$.)

Wiederum lassen sich **Gegenbeispiele** zur konstruktiven Gültigkeit angeben.

Aber:

$\forall f[\dots] \forall \epsilon \exists x (|f(x)| < \epsilon)$ gilt konstruktiv.

Ebenso:

$\forall f(\alpha(f) \rightarrow \exists x (f(x) = 0))$, wobei

$\alpha(f) := \forall b \forall a < b \exists c (a < c < b \wedge f(c) \neq 0)$

Insbesondere gilt der Mittelwertsatz für (konstruktiv) analytische Funktionen.

22

Bereich der konstruktiven Mathematik

Nahezu alle klassischen Gebiete der Mathematik haben (mittlerweile) auch ein konstruktives Pendant:

◇ Differentialgleichungen

◇ Potentialtheorie

◇ Topologie

◇ Variationsrechnung

◇ Lineare Algebra

◇ Gruppen, Ringe, Körper, ...

◇ ...

24

Schulen der Konstruktiven Mathematik

- ◇ Russischer Konstruktivismus (Markov-Schule)
- ◇ Rekursive Analysis
- ◇ (Brouwer'scher) Intuitionismus
- ◇ Bishop's Konstruktivismus
- ◇ Martin-Löf'sche Typentheorie
- ◇ ...

Die einzelnen Auffassung führen zu *unterschiedlichen mathematischen Ergebnissen* und sind *nicht* nach dem Schema 'stärkere/schwächere Annahmen' vergleichbar!

25

Russischer Konstruktivismus (Markov-Schule)

- ◇ Gehört auf A.A. Markov (jr., 1903-1979) zurück
- ◇ 'Konstruktionen' werden mit Markov-Algorithmen identifiziert. Markov-Algorithmen bilden ein universelles Berechnungsmodell (äquivalent zu Turingmaschinen, partiell rekursiv etc.)
- ◇ Besonderes Axiomenschema (Markov's Schema) **(MP)**:
$$(\forall n[A(n) \vee \neg A(n)] \wedge \neg \exists x A(x)) \rightarrow \exists x A(x)$$

äquivalent zu $\forall x \in \mathbb{N} : \neg x \leq 0 \rightarrow x > 0$
- ◇ Abgesehen von **(MP)** gilt intuitionistische Logik

27

Die Church-Turing-These (CTT)

Klassische Formulierung: Jeder Algorithmus kann als rekursive Funktion (bzw. Turingmaschinenprogramm) dargestellt werden.

Im Gegensatz zur klassischen Mathematik kann man verschiedene Varianten von **CTT** *innerhalb* der konstruktiven Mathematik ausdrücken:

CT: $\forall \alpha \exists \forall n(\{e\}(n) = \alpha(n))$

α läuft über alle 'regelmäßigen Folgen' ('lawlike sequences')

FCT: Wie **CT** jedoch mit Brouwer'schen 'Wahlfolgen' statt 'regelmäßigen Folgen'

WCT: $\forall \alpha \neg \exists e \forall n(\{e\}(n) = \alpha(n))$

'Es gibt keine nicht-rekursiven Folgen'

26

Rekursive Analysis

- ◇ (Wie in der Markov-Schule:) (**CTT**) wird vorausgesetzt, konstruktiv wird mit 'rekursiv' identifiziert
- ◇ (Aber:) klassische Logik als Basislogik
- ◇ Alle Sätze werden (klassisch äquivalent) so umformuliert, dass ' $\forall x \exists y A(x, y)$ ' jeweils durch ' $\exists f \forall x A(x, f(x))$ ' ersetzt ist
- ◇ enge Beziehung zum russischen Konstruktivismus: 'rekursifizierte' Versionen sind (i.a.) klassisch beweisbar g.d.w. auch in intuitionistischer Logik + **(MP)** beweisbar

28

Intuitionismus

- ◊ L(uitzen) E(geburtus) J(an) Brouwer (1881-1966),
Gegnerschaft zu Hilbert (komplexe Geschichte: Hilbert bot
Brouwer 1919 einen Lehrstuhl in Göttingen an)
- ◊ Brouwer's Theorie des Kontinuums (*Wahlfolgen*, *Fan-Theorem*,
Bar-Induktion etc.) ist nicht nur von klassischer Mathematik,
sondern auch von anderen Schulen des Konstruktivismus weit
entfernt
- ◊ Mathematik bestimmt Logik, nicht umgekehrt
- ◊ Ausgeprägte, oft 'schwer verständliche' philosophische
Fundierung (zentral: 'Das kreative Subjekt')

29

Bemerkungen zum Auswahlaxiom

Hintergrund:

'Glaube' an das Auswahlaxiom scheint (historisch) oft Platonisten
von Mathematikern mit 'vorsichtigeren' Grundlagenhaltungen zu
trennen.

Fakt:

Die Gültigkeit des Auswahlaxioms folgt aus der
BHK-Interpretation der intuitionistischen Logik.

Allerdings:

Nur bestimmte 'konstruktive Mengenlehren'
validieren das Auswahlaxiom.
Klassische Formulierungen sind natürlich inkonstruktiv.

31

Bishop's Konstruktivismus

- ◊ Errett Bishop (1928-1983)
'Foundations of Constructive Analysis' (1967) – schullbildend
- ◊ Jedes Theorem soll einen numerischen Gehalt haben
- ◊ Keine Identifikation von 'regelmäßig' und 'rekursiv' (aber auch
keine nicht-rekursiven Regeln)
- ◊ Verschiedene Interpretationsmöglichkeiten:
Beeson über Bishop:
'Classical mathematician, Russian constructivist,
intuitionist – everyone will read the mathematics slightly
differently, but everyone will accept it'
- ◊ Keine ausgeprägte philosophische Basis

30

Bemerkungen zum Auswahlaxiom

Hintergrund:

'Glaube' an das Auswahlaxiom scheint (historisch) oft Platonisten
von Mathematikern mit 'vorsichtigeren' Grundlagenhaltungen zu
trennen.

Fakt:

Die Gültigkeit des Auswahlaxioms folgt aus der
BHK-Interpretation der intuitionistischen Logik.

Allerdings:

Nur bestimmte 'konstruktive Mengenlehren'
validieren das Auswahlaxiom.
Klassische Formulierungen sind natürlich inkonstruktiv.

32

Kritik am Konstruktivismus

- ◊ Hilbert: 'Boxen mit an den Rücken gebundener Hand'
'Vertreibung aus dem Cantorsche Paradies'
- ◊ Gefährdete 'Einheit der Mathematik'
- ◊ Beweise oft langwieriger, weniger elegant
- ◊ Mangel an Relevanz für konkrete algorithmische Probleme ('Computeralgebra' ist klassische Mathematik!)

33

Verteidigung des Konstruktivismus

- ◊ überzeugende philosophische Basis (Brouwer, Weyl, ...)
- ◊ kritisierte 'Mängel' haben auch soziologische Gründe:
 - vergleichsweise wenig konstruktive Mathematiker
 - (contra Intuitionismus:) starker Wille zur 'Einheit der Mathematik'
- ◊ die 'Ideologie' des Konstruktivismus generiert neue Problemstellungen und Perspektiven (siehe z.B. M. Frank)
- ◊ Manche Resultate von Konstruktivisten repräsentieren auch aus klassischer Sicht überzeugenden Fortschritt (Bishop: Ergodentheorie, Beeson: 'On the area of harmonic surfaces', Seedorf 'Diagonalization of Continuous Matrices')

34

Konstruktive Existenz klassisch?!

Intuitionistische Logik erfüllt das konstruktive Existenzprinzip:

(EE') $T \vdash \exists x A(x)$ impliziert $T \vdash A(t)$
für einen geschlossenen Term t der offenen Theorie T

Im allgemeinen ist **(EE')** klassisch falsch:

vide $P(0) \vee P(1) \vdash \exists x P(x)$

Nota Bene: Es ist algorithmisch unentscheidbar ob **(EE')** für gegebene T und A klassisch gilt!

Kann man charakterisieren unter welchen Umständen **(EE')** klassisch gilt?

Satz (Baaß/F, LPAR 2003)

$T \vdash A(t)$ für einen geschlossenen Term t genau dann, wenn $\Gamma(T) \vdash \Gamma(\exists x A(x))$ für eine bestimmte, einfache Sprachtransformation Γ .

35

Zusammenfassend

- ◊ Konstruktive Mathematik besteht in einer *bestimmten Art* Mathematik zu betreiben
- ◊ Konstruktive Mathematik ist kein monolithischer Block, sondern ist in (oft sehr unterschiedlichen) 'Schulen' ausgeprägt
- ◊ 'naiver Konstruktivismus' bzw. auch 'Computermathematik' sind von Intuitionismus / russischem Konstruktivismus / rekursiver Analysis / Bishop's Konstruktivismus ... sehr weit entfernt
- ◊ Konstruktive Mathematik ist auch heute noch ein aktiver Forschungszweig mit vielen Aspekten

36