

<b>3.0/2.0 VU Formale Modellierung</b>			
185.A06		SS/WS 2014	16. Dezember 2014
Matrikelnummer	Familiename	Vorname	Gruppe <b>A</b>

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Die Attraktionen eines Indoorspielplatzes werden durch Einwurf sogenannter Tokens (Plastikmünzen) bezahlt, die zuvor bei einem Automaten gekauft werden. Der Automat akzeptiert Münzen im Wert von 5, 10 und 20 Cent. Immer wenn der eingeworfene Geldbetrag 25 Cent oder mehr beträgt, gibt der Automat ein Token aus. War das Guthaben höher als 25 Cent, wird der Restbetrag auf den Kauf des nächsten Token angerechnet; Geld wird keines zurückgegeben.

Modellieren Sie den Token-Automaten durch einen Mealy-Automaten, der bei jeder eingeworfenen Münze entscheidet, ob ein Token ausgegeben (J) oder nicht ausgegeben (N) werden soll. Der Einwurf der Münzen 5 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 5 Cent und 10 Cent führt beispielsweise zur Ausgabe NNNJNJ.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Die lineare Optimierung (auch lineare Programmierung genannt) beschäftigt sich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen über Mengen, die durch lineare Gleichungen und Ungleichungen beschrieben werden können, das heißt, durch Gleichungen und Ungleichungen folgenden Typs:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + \dots = b$$

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + \dots \leq b$$

wobei  $a_1, a_2, a_3, \dots$  und  $b$  reelle Konstanten und  $v_1, v_2, v_3$  Variablen sind.

Damit solche Optimierungsprobleme durch den Computer verarbeitet werden können, müssen die (Un)Gleichungen in maschinenlesbare Form gebracht werden. Variablen werden dabei durch das Symbol  $v$  gefolgt von einer oder mehreren Dezimalziffern dargestellt. Die reellen Konstanten werden durch arithmetische Ausdrücke dargestellt, die aus ganzzahligen Numeralen und Konstantensymbolen mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Klammern gebildet werden können. Konstantensymbole werden durch das Symbol  $c$  gefolgt von einer oder mehreren Dezimalziffern dargestellt. Die arithmetischen Operationen werden durch die Symbole  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ ,  $=$  bzw.  $<=$  dargestellt. Die einzelnen Gleichungen und Ungleichungen werden durch einen Strichpunkt (;) getrennt.

Beispiel eines linearen Programms:

$$\begin{aligned} 7*v1 + 1*v2 + c3*v3 &<= 30; \\ (3*c100)*v3 + ((1-c1)/2)*v2 &= 42; \\ 41*v1 + (1-c1)*v2 &<= (c2+1/(10-c3)) \end{aligned}$$

Beschreiben Sie derartige lineare Programme durch eine kontextfreie Grammatik. Verwenden Sie so weit wie möglich EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu halten.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Professor John Frink organisiert eine internationale Konferenz und sucht zur Unterstützung Student Volunteers. Nach zahlreichen Vorstellungsgesprächen schränkt er die Auswahl auf Bart, Janey, Lisa, Milhouse und Richard ein, wobei allerdings nur Lisa und Richard auch Fremdsprachen beherrschen. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Janey möchte ich auf jeden Fall, sie hat bei der letzten Konferenz schon erfolgreich mitgearbeitet.
  - Ich kann höchstens drei Volunteers anstellen.
  - Ich brauche jedenfalls mindestens einen Volunteer, der Fremdsprachen spricht.
  - Richard und Milhouse kennen die Räume, in denen die Konferenz stattfinden soll. Einen der beiden sollte ich auf jeden Fall nehmen, aber beide zu nehmen ist nicht notwendig.
  - Richard will nur mitmachen, wenn ich auch Bart anstelle.
  - Milhouse und Lisa wollen nur gemeinsam genommen werden, da sie andernfalls zusammen auf Urlaub fahren wollen.
- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.
- b) Wen stellt Professor Frink als Student Volunteer an? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Seien *Liest*, *Student*, *Dick* und *Buch* Prädikatensymbole und *nibelungen* sowie *comic* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

<i>Liest</i> ( $x, y$ ) ... $x$ liest $y$	<i>Buch</i> ( $x$ ) ... $x$ ist ein Buch
<i>Student</i> ( $x$ ) ... $x$ ist ein Student	<i>nibelungen</i> ... Nibelungen
<i>Dick</i> ( $x$ ) ... $x$ ist dick	<i>comic</i> ... Comic

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Manche Studenten lesen nur dann die Nibelungen, wenn sie auch dicke Bücher lesen.
- b) Dicke Studenten lesen einige Bücher aber keine Comics.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\text{Martin, Nina, Karl, Iris, Taschenbuch, Comic, Wörterbuch, Liederbuch, Roman,} \\ &\quad \text{Krimi, Sachbuch}\} \\ I(\textit{Student}) &= \{\text{Martin, Nina, Iris}\} \\ I(\textit{Buch}) &= \{\text{Taschenbuch, Comic, Wörterbuch, Liederbuch, Roman}\} \\ I(\textit{Dick}) &= \{\text{Wörterbuch, Roman, Krimi}\} \\ I(\textit{Liest}) &= \{(\text{Martin, Comic}), (\text{Martin, Liederbuch}), \\ &\quad (\text{Nina, Roman}), (\text{Nina, Krimi}), \\ &\quad (\text{Iris, Roman}), (\text{Iris, Liederbuch}), (\text{Iris, Krimi}), \\ &\quad (\text{Karl, Comic}), (\text{Karl, Krimi})\} \\ I(\textit{comic}) &= \text{Comic} \\ I(\textit{krimi}) &= \text{Krimi} \\ I(\textit{roman}) &= \text{Roman} \end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation  $I$  wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

- c)  $\forall x (\textit{Liest}(x, \textit{comic}) \neq \textit{Liest}(x, \textit{roman}))$
- d)  $\exists x (\textit{Liest}(x, \textit{comic}) \wedge \neg \textit{Liest}(x, \textit{krimi}))$
- e)  $\forall x (\textit{Student}(x) \supset \exists y (\textit{Dick}(y) \wedge \textit{Liest}(x, y)))$
- f)  $\exists x \exists y (\textit{Student}(x) \wedge \textit{Buch}(y) \wedge \neg \textit{Liest}(x, y))$

**Aufgabe 5 (10 Punkte)** SAT-Solver sind Programme, die aussagenlogische Formeln auf Erfüllbarkeit testen. Typische SAT-Solver erhalten als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform und liefern die Antwort „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.

Beispiel: Für die konjunktive Normalform  $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$  liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen  $I_1(A) = I_1(B) = 1$  oder  $I_2(A) = I_2(B) = 0$ .

- a) Wie lässt sich eine Konsequenzbeziehung  $F_1, \dots, F_n \models G$  mit Hilfe eines derartigen SAT-Solvers überprüfen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) SAT-Solver liefern in der Regel nur eine einzige erfüllende Variablenbelegung. Die weiteren werden nicht ausgegeben, da das die verwendeten Verfahren nicht unterstützen. Was muss man tun, um diese dennoch mit Hilfe des SAT-Solvers berechnen zu können? Beschreiben Sie Ihre Methode und erläutern Sie sie an Hand des oben angeführten Beispiels. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Methode.

Hinweis: Überlegen Sie, wie die Eingabeformel abgeändert werden muss, um andere Variablenbelegungen als die bereits berechnete zu erhalten.