3.0/2.0 VU Formale Modellierung

185.A06 SS 2013 18. September 2013

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
			A

Aufgabe 1 (10 Punkte) SAT-Solver sind Programme, die aussagenlogische Formeln auf Erfüllbarkeit testen. Typische SAT-Solver erhalten als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform und liefern die Antwort „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.

Beispiel: Für die konjunktive Normalform $F = (A \lor \neg B) \land (\neg A \lor B)$ liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen $I_1(A) = I_1(B) = 1$ oder $I_2(A) = I_2(B) = 0$.

Angenommen Sie können eine Situation mit Hilfe mehrerer allgemeiner aussagenlogischer Formeln $F_1, \ldots, F_n$ modellieren. Sie wollen nun feststellen, ob in den so beschriebenen Situationen immer auch eine andere Formel G zutrifft. Wie können Sie diese Frage mit Hilfe eines SAT-Solvers beantworten? Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte und geben Sie ein Beispiel an, das diese Schritte illustriert.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Betrachten Sie das folgende Rätsel. Es stehen drei Wasserkrüge mit einem Fassungsvermögen von 3, 5 bzw. 7 Litern zur Verfügung, von denen zu Beginn der kleinste und der größte Krug vollständig gefüllt und der mittlere leer ist. Die Krüge sollen nun ohne Wasserverlust so umgefüllt werden, dass sich am Ende in einem der Krüge genau ein Liter befindet.

Modellieren Sie das Rätsel mit Hife eines endlichen Automaten. Beginnen Sie mit folgenden Fragen.

- Wodurch werden die Zustände des Systems charakterisiert, wie lassen sie sich eindeutig beschreiben? Was ist der Startzustand, was sind die Endzustände? Schätzen Sie die Zahl der benötigten Zustände möglichst genau ab.

  Hinweis: Durch das Umfüllen geht kein Wasser verloren. Weiters ist nach jedem Umfüllvorgang einer der beteiligten Krüge leer oder voll.

- Wie lassen sich die Zustandsübergänge in diesem System beschreiben? Legen Sie das Alphabet des Automaten fest. Welche Bedeutung besitzt die zum Automaten gehörige Sprache, d.h., was geben die Wörter in dieser Sprache an?

  Wählen Sie das Alphabet möglichst klein, aber groß genug, sodass sich aus den Wörtern über diesem Alphabet die Abläufe im System rekonstruieren lassen. Sie sollten also weder jedem Übergang zwischen zwei Zuständen ein eigenes Symbol zuordnen (das Symbol repräsentiert dann nur genau diesen einen Übergang) noch sollten Sie alle Übergänge mit ein und demselben Symbol beschriften, da sich damit die Abläufe im System nicht beschreiben lassen.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Geben Sie eine strukturierte kontextfreie Grammatik in EBNF für jene Variablendeklarationen in JAVA an, die folgende Bauart besitzen. (Jede Zeile ist als ein Wort der Sprache aufzufassen.)

```
float x;
float x = 7.5;
float x = x0;
int y = 42;
List<Auto> mercedes = new ArrayList<Auto>();
Map<Kennzeichen,Auto> verzeichnis;
Map<Kennzeichen,Auto> verzeichnis = new HashMap<Kennzeichen,Auto>();
```

Jede Deklaration beginnt mit einem der skalaren Datentypen `int`, `float`, `double` oder `bool` oder mit einem der Collection-Datentypen `List`, `ArrayList`, `Vector`, `Map` oder `HashMap`. Collection-Datentypen können optional von sogenannten Generics gefolgt sein, das sind Typ-Parameter in spitzen Klammern. Dabei benötigen die Typen `List`, `ArrayList` und `Vector` einen Klassennamen als Parameter (Beispiel: List<Auto>) und die Typen `Map` und `HashMap` zwei (Beispiel: Map<Kennzeichen,Auto>). Klassennamen beginnen mit einem Großbuchstaben, dem beliebige Buchstaben (groß und klein) sowie Ziffern folgen können.

Nach dem Typ folgt ein Variablenname, der aus Buchstaben und Ziffern bestehen kann, wobei das erste Zeichen ein Buchstabe sein muss. Danach folgt optional eine Initialiserung, die aus dem Gleichheitszeichen und einem Anfangswert besteht. Der Anfangswert kann im Fall eines skalaren Datentypen entweder der Namen einer anderen Variablen oder ein skalarer Wert sein. Je nach Typ kann dieser Wert eine ganze Zahl, eine Fließkommazahl (mit einem Punkt als Dezimaltrennzeichen) oder einer der Wahrheitswerte `true` oder `false` sein. Im Fall eines Collection-Datentyps beginnt der Wert mit dem Schlüsselwort `new` gefolgt von einem Collection-Datentyp (optional mit Generics) und einem Klammernpaar.

Beendet werden Deklarationen in jedem Fall mit einem Strichpunkt.

Anmerkung: Entscheiden Sie sich im Fall von Mehrdeutigkeiten, die sich an Hand der Beispiele und der textuellen Beschreibung nicht klären lassen, für eine vernünftige Variante und dokumentieren Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Anna hat für den Geburtstag ihrer Freundin Hatice Muffins gebacken und überlegt nun, wie sie diese verzieren soll. Im Kasten findet sie Haselnüsse, Krokant, Schokostreusel und Marzipanherzen. Sie überlegt: „Damit die Muffins hübsch aussehen, benötige ich mindestens zwei Zutaten. Ich werde entweder Haselnüsse oder Krokant wählen, aber sicher nicht beide zusammen, da sie zu ähnlich sind. Ich möchte Krokant oder Schokostreusel verwenden, vielleicht auch beide. Wenn ich Schokostreusel verwende, dann kann ich keine Marzipanherzen auf die Muffins geben. Ich glaube, Hatice möchte entweder Schokostreusel und Krokant oder sie möchte Marzipanherzen mit Haselnüssen."

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

b) Mit welchen Zutaten dekoriert Anna die Muffins? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Seien $\mathit{Fährt}/2$, $\mathit{Fahrer}/1$, $\mathit{Auto}/1$ und $\mathit{Schnell}/1$ Prädikatensymbole sowie *audi* und *vw* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Fährt}(x,y)$	$\dots$ x fährt y	*audi*	$\dots$ Audi
$\mathit{Fahrer}(x)$	$\dots$ x ist ein Fahrer	*vw*	$\dots$ VW
$\mathit{Schnell}(x)$	$\dots$ x ist schnell		
$\mathit{Auto}(x)$	$\dots$ x ist ein Auto		

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

a) Alle schnellen Fahrer fahren entweder Audi oder VW aber nicht beide.

b) Es gibt einen Fahrer der alle schnellen Autos fährt.

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Felix, Michael, Thomas, Anna, Ferrari, BMW, Renault, Mercedes,} \\
&\quad\ \text{Audi, VW, Citroen}\} \\
I(\mathit{Fahrer}) &= \{\text{Michael, Anna, Felix}\} \\
I(\mathit{Schnell}) &= \{\text{Renault, Ferrari, BMW, Mercedes}\} \\
I(\mathit{Auto}) &= \{\text{Ferrari, Audi, Citroen, BMW, VW}\} \\
I(\mathit{Fährt}) &= \{(\text{Felix, BMW}), (\text{Felix, Audi}), (\text{Felix, Ferrari}), (\text{Felix, Renault}), (\text{Felix, Mercedes}), \\
&\quad\ (\text{Thomas, Citroen}), (\text{Thomas, BMW}), \\
&\quad\ (\text{Michael, Ferrari}), (\text{Michael, Audi}), (\text{Michael, BMW}), \\
&\quad\ (\text{Anna, BMW}), (\text{Anna, Renault})\} \\
I(\mathit{audi}) &= \text{Audi} \\
I(\mathit{citroen}) &= \text{Citroen} \\
I(\mathit{ferrari}) &= \text{Ferrari} \\
I(\mathit{bmw}) &= \text{BMW}
\end{aligned}$$

Geben Sie an, ob die nachfolgenden Formeln in dieser Interpretation wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem konkreten Beispiel; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c) $\exists x \forall y\, (\mathit{Fahrer}(x) \wedge (\mathit{Schnell}(y) \supset \mathit{Fährt}(x, y)))$

d) $\forall x\, (\mathit{Fährt}(x, \mathit{citroen}) \not\equiv \mathit{Fährt}(x, \mathit{ferrari}))$

e) $\exists x\, \mathit{Fährt}(x, \mathit{citroen})$

f) $\exists x\, (\mathit{Fahrer}(x) \wedge \mathit{Fährt}(x, \mathit{bmw}) \wedge \neg \mathit{Fährt}(x, \mathit{audi}))$

g) $\forall x\, (\mathit{Fährt}(x, \mathit{ferrari}) \vee \mathit{Fährt}(x, \mathit{bmw}) \vee \mathit{Fährt}(x, \mathit{citroen}))$